「海―自然と文化」東海大学紀要海洋学部　第１巻第２号　45-52頁（2004）
Journal of The School of Marine Science and Technology, Vol.1 No.2 pp. 45-52, 2004

ポアンカレの補題

藤井信彦[*1]

On Poincarés Lemma

Nobuhiko FUJII

Abstract

We prove Poincarés lemma regading differential forms by an elementary method. We also prove Dolbeault's lemma which is a version of Poincarés lemma in case of complex variables.

１．はじめに

１階の正規型の常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1}$$

の解は，

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

のとき，初期条件 $x = x_0, y = y_0$ の下で，

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,ds = 0$$

により求められることは微分方程式の教科書に書かれている．そして(1)式は形式的に

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

と書くことができるから，その全微分が

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

である２変数の関数は

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,ds \tag{2}$$

により与えられることも同時に示されていることになる．私が微分方程式の講義を担当していてこの定理で奇妙に感じたところは，$P(t,y)$ の y は変数であるが，$Q(x_0,s)$ の x は定数の x_0 になっているところである．もちろんこの立場を入れ替えることは可能であるが，どちらかが変数でどちらかが定数であることには変わりがない．そこで最初，この定理を一般の n 次元に書き換えて，この部分を明確にすることを試みたが，その試みの際に，この関係が Poincaré の補題として多様体上の微分形式に拡張されていることを後に知った．

また，全微分は２変数の関数の微分であるから，(2)式は１変数の不定積分の高次元への自然な拡張の１つ，すなわち(2)式の全微分は

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(u)\,du = f(x) \qquad (a < x_0 < b) \tag{3}$$

という関係の拡張の１つと見ることができる．この関係は微分法と積分法を結びつける最も基本的な関係であるが，これを書き直すと，

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(u)\,du = f(x)$$

という形になり，この形にすると多変数の関数への別の拡張が可能になり，実解析学ではこの事実を理論の出発点にする場合もある（E.M.Stein, Singular Integrals and Differentiality Properties, Princeton Univ. Press, 1970を参照[*2]）．(3)式と

$$\int_{a}^{b} f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{4}$$

という関係は高校生でも知っている基本的な事実である．(3) 式は微分方程式の解という見方からすると，$f(x)$ が連続であるとき，

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の解が定積分により理論的に構成できることを意味する存在定理である．

2004年１月20日受理
＊1　東海大学清水教養教育センター（Department of Mathematics, Tokai University）
＊2　以下この本は［S］と略記する．

(3)式の微分を多変数の全微分，さらに微分形式の外微分に置き換えてその解の存在を論じたのがPoincaréの補題であり，Poincaréの補題は(3)の自然な拡張と見ることができる．しかし，この補題の証明をよく見てみると，その解析的な本質は依然として1変数の(3)と(4)であり，議論の本筋は微分形式の議論として解析よりも代数的な色彩が強くなっている．

このノートの目的はPoincaréの補題においてその解に相当するものを素朴に構成して証明してみようという試みですが，Poincaréの補題を複素変数としてあつかったDolbeaultの補題の証明についても述べます．私はこの方面の専門家ではなく歴史的な流れを調べてみたわけでもありません．また本来は座標変換の議論をとり入れて多様体に踏み込まないと論ずる意味がないのかもしれませんが，このノートでは局所理論にしぼり，その解析的な面に焦点を当てたいと考えています．多様体上においての議論やその現代数学における位置づけに興味のある方は「小平邦彦，複素多様体論，岩波講座基礎数学，岩波書店，1981」*3 および「松島与三，多様体入門，裳華房，1965」*4 を参考にされるとよいでしょう．そして，このノートで扱われている定理，補題はすべて古典的なものであり，既知のものであり，洗練された証明法が他にも数多くあると思われることをお断りしておきます．

また，このノートは筧和則氏（東海大学教育開発研究所），立石徹氏（東海大学付属翔洋高校）および中畑登氏（東海大学短期大学部静岡校舎）の3名の方たちとの[K]をテキストとする複素多様体論の勉強会におけるノートの一部を手直ししたものです．この3名の方たちとの月に数回の勉強会は楽しい思い出となっています．この3名の方たちにあらためて感謝します．

2． n 変数の関数の全微分

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の領域において定義された n 変数の関数 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ に対して考えられる全微分は，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^n}\,dx^n$$

と表せられる．ここではこれを1つの数学的な形式としてとらえておくことにする．逆に n 個の関数の組 $\{f_1, f_2 \cdots, f_n\}$ から

$$df = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + \cdots + f_n dx^n$$

すなわち，

$$f_k(x^1, \cdots, x^n) = \frac{\partial f}{\partial x^k}\,(x^1, \cdots, x^n) \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

を満たす関数 $f(x^1, \cdots, x^n)$ は $f_k(x^1, \cdots, x^n)$ に連続性等があっても存在するとは限らない*5．しかしこの問題に対しては $n = 2$ の場合には，常微分方程式の完全形としてすでに述べたように，次のようにその場合の必要十分条件が知られている：

定理1　$\mathbf{R}^2$ 内の開区間の直積 $D = I_1 \times I_2$ において定義された2変数の C^1 級の関数*6 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ に対して

$$df = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

すなわち，$P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$，$Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を満たす C^2 級の関数 $f(x, y)$ が存在するための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y}\,(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}\,(x, y) \qquad (x, y) \in D$$

であり，このとき (x_0, y_0) を D 内の任意の点とすると，

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\,ds$$

と表され，$f(x_0, y_0) = 0$ である．

この事実は $\mathbf{R}^n$ 上の関数に対しては次のように述べることができる．ここでは微分形式の表現をやめて，解析的な部分のみを表現する．

定理2　$\mathbf{R}^n$ 内の開区間の直積 $D = I_1 \times \cdots \times I_n$ において定義された n 個の C^1 級の関数 $\varphi_1, \varphi_2 \cdots, \varphi_n$ に対して

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^k}\,(x^1, \cdots, x^n) = \varphi_k\,(x^1, \cdots, x^n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

を満たす C^2 級の関数 $\psi(x^1, \cdots, x^n)$ が存在するための必要十分条件は D において

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k}\,(x^1, \cdots, x^n) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^j}\,(x^1, \cdots, x^n)\,(j, k = 1, \cdots, n) \tag{6}$$

が成立することであり，このとき $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ を D 内の任意の点とすると，

$$\psi(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0{}^k}^{x^k} \varphi_k(x_0^1, \cdots, x_0^{k-1}, t^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)\,dt^k \tag{7}$$

と表され，$\psi(x_0^1, \cdots, x_0^n) = 0$ である．

定理2を証明してみよう．

定理2の証明：(6)の必要性は $\psi(x^1, \cdots, x^n)$ が C^2 級であれば，Schwarz の定理より導かれる．

(6)を仮定する．$(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ を D 内の任意の点とする．

$$\psi(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0{}^k}^{x^k} \varphi_k(x_0^1, \cdots, x_0^{k-1}, t^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)\,dt^k$$

と定義すると，$\psi(x_0^1, \cdots, x_0^n) = 0$ であり，

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left\{\sum_{k=1}^{j-1} \int_{x_0{}^k}^{x^k} \varphi_k(x_0^1, \cdots, x_0^{k-1}, t^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)\,dt^k\right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^j} \int_{x_0{}^j}^{x^j} \varphi_j(x_0^1, \cdots, x_0^{j-1}, t^j, x^{j+1}, \cdots, x^n)\,dt^j$$

＊3　以下[K]と略記する．
＊4　以下[M]と略記する．
＊5　1変数では連続性だけでよい．
＊6　C^k 級の関数は k 回偏微分可能でその偏導関数がすべて連続なものをいう．n 変数でも同様である．

$$+\frac{\partial}{\partial x^j}\left\{\sum_{k=j+1}^{n}\int_{x_0^k}^{x^k}\varphi_k(x_0^1,\cdots,x_0^j,\cdots,x^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k\right\}$$

となり，$k\geqq j+1$ のときは，x^j の関数としては定数だから 0 になり，$k\leqq j-1$ のときは φ_k が C^1 級であるから積分と微分の順序交換ができ，また(3)式より．

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\int_{x_0^j}^{x^j}\varphi_j(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},t^j,x^{j+1},\cdots,x^n)\,dt^j=\varphi_j(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},x^j,x^{j+1},\cdots,x^n)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}=&\sum_{k=1}^{j-1}\int_{x_0^k}^{x^k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^j}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^j,\cdots,x^n)\,dt^k\\&+\varphi_j(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},x^j,x^{j+1},\cdots,x^j,\cdots,x^n)\end{aligned}$$

仮定の(6)および(4)より

$$\begin{aligned}&\int_{x_0^k}^{x^k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^j}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^j,\cdots,x^n)\,dt^k\\&=\int_{x_0^k}^{x^k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x^k}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^j,\cdots,x^n)\,dt^k\\&=\varphi_j(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},x^k,x^{k+1},\cdots,x^j,\cdots x^n)\\&\quad-\varphi_j(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},x_0^k,x^{k+1},\cdots,x^j,\cdots x^n).\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}=&\sum_{k=1}^{j-1}\{\varphi_j(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},x^k,x^{k+1},\cdots,x^j,\cdots x^n)\\&-\varphi_j(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},x_0^k,x^{k+1},\cdots,x^j,\cdots x^n)\}\\&+\varphi_j(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},x^j,x^{j+1},\cdots,x^n)\\=&\varphi_j(x^1,\cdots,x^j,\cdots,x^n).\end{aligned}$$

□

調和関数に対してつぎの定理が知られている.[*7]

定理 3　$f(x)$ および $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ はすべて $L^2(\mathbf{R}^n)$ に属す，すなわち，$\mathbf{R}^n$ で定義された 2 乗可積分の関数として，その Poisson 積分を

$$u_0(x,t)=P_t*f(x),u_1(x,t)=P_t*f_1(x),\cdots,u_n(x,t)=P_t*f_n(x)$$

とする,このとき，$f_j(x)$ が $f(x)$ の j th Riesz 変換,

$$f_j(x)=R_j(f)(x),\qquad(j=1,\cdots,n)$$

であるための必要十分条件は $u_0(x,t),u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t)$ が次の一般化された Cauchy-Riemann の方程式を満たすことである．

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x^j}=0,\\ \displaystyle\frac{\partial u_j}{\partial x^k}=\frac{\partial u_k}{\partial x^j},\ (j\neq k,\ x_0=t)\end{cases}\tag{8}$$

ここでは，このノートの範疇外になるので Poisson 積分，Riesz 変換については言及しないが[*8]，上の条件(8)は

$$u_j=\frac{\partial H}{\partial x^j},\ j=0,1,\cdots,n$$

を満たす調和関数 $H(x,t)$ の存在と同値であることが定理 2 からいえる．

とくに複素平面 $\mathbf{C}$ において定義された複素関数

$$f(z)=u(t,x)+iv(t,x)\quad(z=x+it\in\mathbf{C};\ t,x\in\mathbf{R})$$

が $\mathbf{C}$ の領域 D において正則であるための必要十分条件は，Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t}$$

を満たすことであり（変数 x,t の順が逆の書き方であることに注意），これは $n=1$ の場合の(8)式を意味するから，

$$dH(t,x)=u(t,x)\,dt+v(t,x)\,dx$$

となる調和関数 $H(t,x)$ の存在を保証していることになる．

3．Poincaré の補題

最初にこれから必要な微分形式の基本的な事実をまとめておく．詳しい内容はやはり [K] および [M] を参考にしていただきたい．

$x=(x^1,\cdots,x^n)$ を n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の点として x における $\mathbf{R}^n$ の接ベクトル空間または接空間は，微分幾何学では，

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x\right\}\tag{9}$$

を基底とする n 次元ベクトル空間 $T_x(\mathbf{R}^n)$ として定義される．$\{(dx^1)_x,\cdots,(dx^n)_x\}$ は接ベクトル空間の双対空間 $(T_x(\mathbf{R}^n))^*$ の(9)に対する双対基である．このとき，$\wedge$ をテンソル積から定義される外積とすると，

$$dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}\qquad(1\leqq j_k\leqq n,k=1,\cdots,p)$$

は p 次交代共変テンソル場であり，一般の $\mathbf{R}^n$ の p 次交代共変テンソル場 ψ は,

$$\varphi=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p}^{n}\varphi_{j_1,\cdots,j_p}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}\tag{10}$$

と表される．このとき係数の $\varphi_{j_1,\cdots,j_p}=\varphi_{j_1,\cdots,j_p}(x^1,\cdots,x^n)$ は $x=(x^1,\cdots,x^n)$ の関数である．この $\mathbf{R}^n$ の p 次交代共変テンソル場は $\mathbf{R}^n$ 上の p 次微分形式（p 形式 p-form）ともよばれるが，特に

$$\varphi=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j dx^j$$

は 1 次微分形式であり，連続微分可能な関数 $f(x)$ に対して外微分を

$$df=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j\tag{11}$$

と定義する．もう一つたいせつなことは，(10)の p 次微分形式 φ は

＊7 ［S, pp.65-66］
＊8 ［S］を参照．

$$\varphi=\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\varphi_{j_1,\cdots,j_p}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p} \tag{12}$$

とかけることであり，このとき(12)式としての係数 $\varphi_{j_1,\cdots,j_p}$ は添え字 $j_1,\cdots,j_p$ について反対称性，すなわち

$$\varphi_{j_1,\cdots,j_\ell,\cdots,j_k,\cdots,j_p}(x)=-\varphi_{j_1,\cdots,j_k,\cdots,j_\ell,\cdots,j_p}(x)$$

を満たすようにできることである．したがって，$j_1,\cdots,j_p$ の中に同じ番号があるときは，その係数は0である：

$$\varphi_{j_1,\cdots,j_k,\cdots,j_\ell,\cdots,j_p}=0 \qquad (j_k=j_\ell, k\neq\ell).$$

以後，p 次微分形式は(12)の形で表し，その係数には反対称性を仮定しておく．また係数がすべて C^r 級である p 形式を C^r 級の p 形式という．

C^1 級の p 形式

$$\varphi=\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\varphi_{j_1,\cdots,j_p}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}$$

の外微分は

$$d\varphi=\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}d\varphi_{j_1,\cdots,j_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p} \tag{13}$$

により定義される．ここに係数の微分 $d\psi_{j_1,\cdots,j_p}$ は(11)により定義される外微分であり1形式である．

補題1　φ を C^2 級の p 形式

$$\varphi=\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\varphi_{j_1,\cdots,j_p}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}$$

とすると，その外微分は

$$d\varphi=\frac{1}{(p+1)!}\sum_{j_0,j_1,\cdots,j_p=1}^{n}(d\varphi)_{j_0,j_1,\cdots jp}dx^{j_0}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p} \tag{14}$$

となる．ここに，

$$(d\varphi)_{j_0,j_1\cdots jp}=\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\frac{d\varphi_{j_0\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}$$

であり，この係数も反対称であり，$d\varphi$ は連続な $p+1$ 形式である．

命題1　φ をその係数が C^2 級の p 形式

$$\varphi=\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\varphi_{j_1,\cdots,j_p}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}$$

とすると

$$dd\varphi=0.$$

となる．

補題1および命題1の計算は［K, pp.89-91］を参照されたい．

p 形式 φ が C^1 級で

$$d\varphi=0$$

となるとき，φ を閉微分形式という[*9]．φ が1形式なら，

$$d\varphi=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^k$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x^k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^j}\right)dx^k\wedge dx^j$$

であるから，

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x^k}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^j}\ (k,j=1,\cdots,n)$$

のとき閉微分形式になる．また，p 形式 φ が C^1 級の $p-1$ 形式 ψ を用いて

$$\varphi=d\psi$$

と表されるとき，φ は完全微分形式であるといわれる．

ψ が C^2 級で

$$\varphi=d\psi$$

なら，命題1より $d\varphi=0$ であるから，φ は閉微分形式である．すなわち，C^1 級の完全微分形式は閉微分形式である．そしてこの逆がなりたつ．それが Poincaré の補題である．

定理4　(Poincaré の補題[*10])

p 形式 $\varphi(p\geqq1)$ は $\mathbf{R}^n$ 内の開区間の直積 $D=I_1\times\cdots\times I_n$ において C^1 級の閉微分形式であるとする．すなわち，

$$d\varphi=0.$$

このとき，C^2 級の $p-1$ 形式 ψ が存在して

$$\varphi=d\psi$$

となる．さらに φ が C^ν 級 $(1\leqq\nu\leqq\infty)$ ならば ψ も $C^{\nu+1}$ 級になるように構成できる．

定理4の証明：$(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ を D 内の任意の点とする．φ を D における p 形式 $(p\geqq1)$

$$\varphi=\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n}\varphi_{j_1,\cdots,j_p}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}$$

とし，係数の $\varphi_{j_1,\cdots,j_p}$ には反対称性が仮定されているとする．補題1より，$d\varphi=0$ は任意の $\{j_0,j_1,\cdots j_p\}$ に対して

$$\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\frac{\partial\varphi_{j_0\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}=0 \tag{15}$$

を意味する．

さてここで，任意の $\{j_2,\cdots j_p\}$ に対して

$$\psi_{j_2}\cdots_{j_p}(x^1,\cdots,x^n)$$
$$=\sum_{k=1}^{\min\{j_2,\cdots,j_p\}}\int_{x_0^k}^{x^k}\varphi_{kj_2\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k \tag{16}$$

と定義すると，$\varphi_{kj_2\cdots jp}$ が反対称だから $\psi_{j_2\cdots j_p}$ も反対称となる．また $\min\{j_2,\cdots j_p\}=1$ のときは $\varphi_{1j_2\cdots j_p}=0$ であるから $\psi_{j_2\cdots j_p}=0$ となる．$p=1$ のときは，$\min\{j_2,\cdots j_p\}=n$ とする．

$p-1$ 形式 ψ を

＊9　φ が0形式（通常の C^1 関数の場合）のときは，$d\varphi=0$ は φ が定数を意味する．
＊10　［K, pp.95-96.］，［K, pp.135-136.］を参照されたい．

$$\psi=\frac{1}{(p-1)\,!}\sum_{j_2,\cdots,j_p=1}^{n}\psi_{j_2\cdots j_p}dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}$$
$$=\frac{1}{(p-1)\,!}\sum_{j_2,\cdots,j_p=2}^{n}\psi_{j_2\cdots j_p}dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}$$

と定義する．補題1より，

$$d\psi=\frac{1}{p!}\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_p=1}^{n}(d\psi)_{j_1j_2\cdots j_p}dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}$$

であり，

$$(d\psi)_{j_1j_2\cdots j_p}=\sum_{s=1}^{p}(-1)^{s+1}\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}. \tag{17}$$

さて p 個の添え数 $j_1,j_2,\cdots,j_p\,(1\leqq j_l\leqq n\,;\ l=1,\cdots,p)$ を固定する．$\psi_{j_2,\cdots,j_p}$ が反対称であるから，$(d\psi)_{j_1,j_2\cdots j_p}$ も反対称である．したがって，

$$\sum_{s=1}^{p}(-1)^{s+1}\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x_{j_s}}=\varphi_{j_1,j_2,\cdots,j_p} \tag{18}$$

を示せば定理は証明される．$j_{s_0}=\min\{j_1,j_2,\cdots,j_p\}$ とおくと，

$$(d\psi)_{j_1j_2\cdots j_p}=\sum_{s=1}^{p}(-1)^{s+1}\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}$$
$$=(-1)^{s_0+1}\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s0-1}j_{s0+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_{s0}}}+\sum_{j_s>j_{s0}}(-1)^{s+1}\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}$$

$j_{s_0}<\mathrm{m}_{s_0}=\min\{j_1,\cdots,j_{s_0-1},j_{s_0+1},\cdots,j_p\}$ としてよいから，(3)を用いて，

$$\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s0-1}j_{s0+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_{s0}}}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x^{j_{s0}}}\sum_{k=1}^{\mathrm{m}_{s0}}\int_{x_0^k}^{x^k}\varphi_{kj_1\cdots j_{s0-1}j_{s0+1}\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^x$$
$$=\sum_{k=1}^{j_{s0}-1}\int_{x_0^k}^{x^k}\frac{\varphi_{kj_1\cdots j_{s0-1}j_{s0+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_{s0}}}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k$$
$$+\varphi_{j_{s0}j_1\cdots j_{s0-1}j_{s0+1}\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{j_{s0}-1},x^{j_{s0}},x^{j_{s0}+1},\cdots,x^n).$$

$k=\min\{j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_p\}$ のときは $\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}=0$ となることに注意して，$j_s>j_{s_0}$ のときは，$\mathrm{m}_s=\min\{j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_p\}=j_{s_0}$ としてよいから，

$$\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\sum_{k=1}^{\mathrm{m}_s}\int_{x_0^k}^{x^k}\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k$$
$$=\sum_{k=1}^{\mathrm{m}_s}\int_{x_0^k}^{x^k}\frac{\partial\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k$$
$$=\sum_{k=1}^{j_{s0}-1}\int_{x_0^k}^{x^k}\frac{\partial\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k.$$

したがって，

$$(d\psi)_{j_1j_2\cdots j_p}$$
$$=(-1)^{s0+1}\varphi_{j_{s0}j_1\cdots j_{s0-1}j_{s0+1}\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{j_{s0}-1},x^{j_{s0}},x^{j_{s0}+1},\cdots,x^n)$$
$$+\sum_{s=1}^{p}(-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{j_{s0}-1}\int_{x_0^k}^{x^k}\frac{\partial\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k$$
$$=\varphi_{j_1\cdots j_{s0-1}j_{s0}j_{s0+1}\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{j_{s0}-1},x^{j_{s0}},x^{j_{s0}+1},\cdots,x^n)$$
$$+\sum_{k=1}^{j_{s0}-1}\int_{x_0^k}^{x^k}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{s+1}\frac{\partial\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k.$$

条件(15)より，

$$\sum_{s=1}^{p}(-1)^{s+1}\frac{\partial\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_p}}{\partial x^{j_s}}=\frac{\partial\varphi_{j_1\cdots j_p}}{\partial x^k}$$

(4)を用いて，

$$(d\psi)_{j_1j_2\cdots j_p}$$
$$=\varphi_{j_1\cdots j_{s0-1}j_{s0}j_{s0+1}\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{j_{s0}-1},x^{j_{s0}},x^{j_{s0}+1},\cdots,x^n)$$
$$+\sum_{k=1}^{j_{s0}-1}\int_{x_0^k}^{x^k}\frac{\partial\varphi_{j_1\cdots j_p}}{\partial x^k}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},t^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\,dt^k$$
$$=\varphi_{j_1\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{j_{s0}-1},x^{j_{s0}},x^{j_{s0}+1},\cdots,x^n)$$
$$+\sum_{k=1}^{j_{s0}-1}\{\varphi_{j_1\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},x^k,x^{k+1},\cdots,x^n)$$
$$-\varphi_{j_1\cdots j_p}(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},x_0^k,x^{k+1},\cdots,x^n)\}$$
$$=\varphi_{j_1\cdots j_p}(x^1,\cdots,x^{j_{s0}-1},x^{j_{s0}},x^{j_{s0}+1},\cdots,x^n).$$

これにより(18)式が示される．

□

［K, pp.95-96.］にある証明法は変数に関する帰納法である．また［M, pp.135-136.］においても手際よく証明されている．

4．Dolbeault の補題

$f(z)$ を複素平面 $\mathbf{C}$ の領域で定義された複素数値の関数で連続微分可能，すなわち $z=x+iy$ としたとき，(x,y) の関数として連続微分可能とする．このとき，

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

と定義される．

$f(z)$ を複素平面 $\boldsymbol{C}$ の領域 D において，関数 $f(z)$ が正則であるための必要十分条件は，D において

$$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0 \tag{19}$$

が成り立つことであり，これは Cauchy-Riemann の方程式である．

補題 2　D を複素平面 $\boldsymbol{C}$ 内の有界凸状領域で，その境界 ∂D は閉正則曲線になるものとし，複素関数 $\varphi(z)$ を $\bar D$ を含む領域で連続微分可能な関数とする．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\iint_D\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\right\}=\varphi(z)\qquad(z\in D) \tag{20}$$

および，

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_D\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\,\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta=\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\qquad(z\in D) \tag{21}$$

が成り立つ．

ここで微分形式としての積分の形が出てきているが，

$$\iint_D\varphi(z)\,dz\wedge d\bar z=-2i\iint_D\varphi(z)\,dxdy$$

と解釈すればよい．

(20)式は実変数の関数の(3)式に対応し，(21)式は(4)式に対応する．とくに(21)式は Green の定理：

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\,dz\wedge d\bar{z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(z)\,dz$$

から直接導かれ，Greenの定理は(4)式に他ならない．実変数の場合に対応して，この2つの関係がこれからの議論の解析的な背景になる．証明は‘J.B.Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, pp.319-320’*11 および［K; pp.100-101.］を参照していただきた．

(20)式はまた，微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}} = \varphi(z) \qquad (z\in D) \tag{22}$$

の特殊解 $f(z)$ を構成していることになる．$\varphi(z)=0$ の場合の解が正則関数全体であるわけだから，その線形性により微分方程式(22)のすべての解が求まる．［G］では(22)式を inhomogeneous Cauchy-Riemann equation（非同次のCauchy-Riemannの方程式）とよんでいる．ともかく，式(20)の関係は解析的に興味深いものである．

z および $\bar{z}$ に関する偏微分はそのまま n 複素変数の関数 $f(z)=f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ でも考えることができる．$z_k=x_{2k-1}+ix_{2k}, (x_{2k-1},x_{2k}\in\boldsymbol{R}; k=1,\cdots,n)$ として，

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{2k-1}}-i\frac{\partial f}{\partial x_{2k}}\right),\ \frac{\partial f}{\partial\bar{z}_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{2k-1}}+i\frac{\partial f}{\partial x_{2k}}\right)$$

と定義される*12．

補題2を n 次元複素空間 $\boldsymbol{C}^n$ 上の関数にたいして書き改めてみると次のようになる．

補題3　$D_k(k=1,\cdots,n)$ を複素平面 $\boldsymbol{C}$ 内の有界凸状領域で，その境界 ∂D は閉正則曲線になるものとし，D をその直積からなる $\boldsymbol{C}^n$ の領域とする．すなわち，

$$D=D_1\times D_2\times\cdots\times D_n\subset\boldsymbol{C}^n.$$

$\varphi(z)=\varphi(z_1,\cdots,z_n)$ を $\bar{D}$ を含む領域で連続微分可能な関数とする．$k=1,\cdots,n$ にたいして，

$$\begin{aligned}
&\Phi_k(\varphi)(z_1,\cdots,z_n)\\
&\quad=\frac{1}{(2\pi i)^k}\int_{\partial D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\cdots\int_{\partial D_1}\frac{1}{\zeta_1-z_1}\varphi(\zeta_1,\cdots,\zeta_{k-1},\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\\
&\qquad d\zeta_1\cdots d\zeta_k,\\
&\Phi_0(\varphi)(z_1,\cdots,z_n)=\varphi(z_1,\cdots,z_n),\\
&\Psi_k(\varphi)(z_1,\cdots,z_n)\\
&\quad=\frac{1}{2\pi i}\iint_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\Phi_{k-1}(\varphi)(z_1,\cdots,z_{k-1},\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\\
&\qquad d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k
\end{aligned}$$

とおく．このとき $z\in D$ として，

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\Psi_k(\varphi)(z)=0 \qquad (1\leqq j<k\leqq n), \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\Psi_j(\varphi)(z)=\Phi_{j-1}(\varphi)(z) \qquad (1\leqq j\leqq n), \tag{24}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\Phi_{k-1}(\varphi)(z_1,\cdots,z_{k-1},\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\,d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k = \Phi_{k-1}(\varphi)(z)-\Phi_k(\varphi)(z) \qquad (1\leqq k\leqq n). \tag{25}$$

補題3は補題2からほぼ直接に導かれる．一般に $f(z_j)$ が連続微分可能であれば，正則性により，

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j}\frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j-z_j}\,d\zeta_j=0 \qquad (z_j\in D_j)$$

である．これより(23)が導かれる．

$\Psi_k(z)$ の定義と補題2の(20)より(24)が直接導かれる．また，

$$\Phi_k(\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\Phi_{k-1}(\varphi)(z_1,\cdots,z_{k-1},\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\,d\zeta_k$$

であるから，(25)も補題2の(21)より求められる．

Dolbeaultの補題というのは，$\boldsymbol{C}^n$ 上の (p,q) 微分形式 φ にたいして，それが $\bar{\partial}$ 閉形式であれば，

$$\bar{\partial}\psi=\varphi$$

をみたす $(p,q-1)$ 微分形式 ψ が存在するという定理で，Poincaréの補題を複素変数で考えたものに相当する*13．ここでは微分形式の話が主ではないから，すこし煩雑になるが微分形式の言葉を使わずにDolbeaultの補題で証明されている事実を説明する．

定理5　(Dolbeaultの補題)　q は1以上の整数とする．$D_k(k=1,\cdots,n)$ を複素平面 $\boldsymbol{C}$ 内の有界凸状領域で，その境界 ∂D は閉正則曲線になるものとし，D をその直積からなる $\boldsymbol{C}^n$ の領域とする．$\{\varphi_{j_1\cdots j_q}(z)\}_{j_1,\cdots,j_q}$ は $\bar{D}$ を含む領域で連続微分可能であり，添え数について反対称性をもつ関数の組とする．この関数の組が任意の $\{j_0,j_1,\cdots,j_q\}$ に対して

$$\sum_{s=0}^{q}(-1)^s\frac{\partial\varphi_{j_0j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}}{\partial\bar{z}_{j_s}}=0 \tag{26}$$

を満たすと仮定する．このとき，D において連続微分可能な $q-1$個の添え数をもつ関数の組 $\{\psi_{j_2\cdots j_q}(z)\}$ が存在して，添え数について反対称であり，さらに任意の $\{j_1,\cdots,j_q\}$ に対して

$$\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}}{\partial\bar{z}_{j_s}}(z)=\varphi_{j_1\cdots j_q}(z)\ (z\in D) \tag{27}$$

をみたす．

注意．　仮定の(26)が関数の組 $\{\varphi_{j_1\cdots j_q}(z)\}_{j_1,\cdots,j_q}$ により決まる微分形式 φ が $\bar{\partial}$ 閉形式であることを意味し，結論の(27)が関数の組 $\{\varphi_{j_2\cdots j_q}(z)\}$ により決まる微分形式 ψ が $\bar{\partial}\psi=\varphi$ をみたすことを意味する．

＊11　以下［G］と略記する．
＊12　［K; pp.10-11.］．n 変数の複素数は $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ で表わす．
＊13　詳細は［K; pp.96-105.］を参照されたい．

定理5の証明． 任意の添え数 $j_2,\cdots,j_q(1\leqq j_2,\cdots,j_q\leqq n)$ と $k(1\leqq k\leqq n)$ およびそれに対応する関数 $\varphi_{kj_2\cdots j_q}$ にたいして，補題3のように $\Phi_j(\varphi_{kj_2\cdots j_q})$ および $\Psi_j(\varphi_{kj_2\cdots j_q})$ を各 $j(0\leqq j\leqq n)$ にたいして定義する．そして $q-1$ 個の添え字の関数 $\psi_{j_2\cdots j_q}$ を

$$\psi_{j_2\cdots j_q}(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{k=1}^{\min\{j_2,\cdots,j_q\}}\Psi_k(\varphi_{kj_2\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_n) \tag{28}$$

と定義する．$\varphi_{kj_2\cdots j_q}$ の反対称性により，$\psi_{j_2\cdots j_q}$ の反対称性は明らかである．この $\{\psi_{j_2\cdots j_q}\}$ が(27)式をみたすことを証明する．

q 個の添え数 $j_1,j_2,\cdots,j_q(1\leqq j_l\leqq n;\ l=1,\cdots,q)$ を固定する．$\{\psi_{j_2\cdots j_q}\}$ の反対称性により(27)式の左辺の関数も $j_1,\cdots,j_q$ に関して反対称性をもつから，$j_1<j_2<\cdots<j_q$ の場合に(27)式を証明すれば十分である．

$$\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}}{\partial\bar{z}_{j_s}}(z_1,\cdots,z_n)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\sum_{k=1}^{\min\{j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_q\}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_n)$$

であり，$s\geqq2$ のときは，$\min\{j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_q\}=j_1$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\sum_{k=1}^{\min\{j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_q\}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_n)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\sum_{k=1}^{j_1}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{j_1-1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_n). \tag{29}$$

また，$s=1$ のときは，$\min\{j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_q\}=j_2$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\sum_{k=1}^{\min\{j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_q\}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_n)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\sum_{k=1}^{j_2}\Psi_k(\varphi_{kj_2\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{j_2-1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\Psi_k(\varphi_{kj_2\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{j_1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\Psi_k(\varphi_{kj_2\cdots j_q})(z)+\sum_{k=j_1+1}^{j_2-1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\Psi_k(\varphi_{kj_2\cdots j_q})(z).$$

補題3の(23)より，

$$\sum_{k=j_1+1}^{j_2-1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\Psi_k(\varphi_{kj_2\cdots j_q})(z)=0$$

であるから，

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\sum_{k=1}^{\min\{j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_q\}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z)$$
$$=\sum_{k=1}^{j_1-1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\Psi_k(\varphi_{kj_2\cdots j_q})(z)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\Psi_{j_1}(\varphi_{j_1\cdots j_q})(z). \tag{30}$$

したがって，(29)，(30)より，

$$\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial\psi_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}}{\partial\bar{z}_{j_s}}(z)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\Psi_k(\varphi_{kj_2\cdots j_q})(z)+\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{j_1-1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_1}}\Psi_{j_1}(\varphi_{j_1j_2\cdots j_q})(z)+\sum_{k=1}^{j_1-1}\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z). \tag{31}$$

$1\leqq k\leqq j_1-1$ のとき，$k<j_s(s=1,\cdots,q)$ であるから，$\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z)$ を定義する積分の変数の中に z_{j_s} は入ってこない．よって微分と積分の順序交換を行って，

$$\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z)$$
$$=\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\frac{1}{2\pi i}\iint_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\Phi_{k-1}(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_{k-1},\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\,d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k$$
$$=\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\frac{1}{2\pi i}\iint_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\left(\int_{\partial D_{k-1}}\frac{1}{\zeta_{k-1}-z_{k-1}}\cdots\int_{\partial D_1}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_{k-1}\right)d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^k}\iint_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\left(\int_{\partial D_{k-1}}\frac{1}{\zeta_{k-1}-z_{k-1}}\cdots\int_{\partial D_1}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\sum_{s=0}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_{k-1}\right)d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k$$

ここで仮定の(26)式により，

$$\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\varphi_{j_1j_2\cdots j_q}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)$$

であるから，

$$\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j_s}}\Psi_k(\varphi_{kj_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q})(z)$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^k}\iint_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\left(\int_{\partial D_{k-1}}\frac{1}{\zeta_{k-1}-z_{k-1}}\cdots\int_{\partial D_1}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\varphi_{j_1j_2\cdots j_q}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_{k-1}\right)d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^k}\iint_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left\{\int_{\partial D_{k-1}}\frac{1}{\zeta_{k-1}-z_{k-1}}\cdots\int_{\partial D_1}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\varphi_{j_1j_2\cdots j_q}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_{k-1}\right\}d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\iint_{D_k}\frac{1}{\zeta_k-z_k}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\Phi_{k-1}(\varphi_{j_1j_2\cdots j_q})(z_1,\cdots,z_{k-1},\zeta_k,z_{k+1},\cdots,z_n)\,d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k. \tag{32}$$

このとき補題3の(25)より，

$$(32)\text{の最右辺} = \Phi_{k-1}(\varphi_{j_1, j_2 \cdots j_q})(z) - \Phi_k(\varphi_{j_1, j_2 \cdots j_q})(z).$$

また，同じく補題3の(24)より，

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} \Psi_{j_1}(\varphi_{j_1 \cdots j_q})(z) = \Phi_{j_1-1}(\varphi_{j_1 \cdots j_q})(z).$$

したがって，

$$\begin{aligned}(31)\text{の最右辺} &= \Phi_{j_1-1}(\varphi_{j_1 \cdots j_q})(z) + \sum_{k=1}^{j_1-1} \{\Phi_{k-1}(\varphi_{j_1, j_2 \cdots j_q})(z) \\ &\quad - \Phi_k(\varphi_{j_1, j_2 \cdots j_q})(z)\} \\ &= \Phi_0(\varphi_{j_1, j_2 \cdots j_q})(z) \\ &= \varphi_{j_1, j_2 \cdots j_q}(z).\end{aligned}$$

□

謝　辞

最後に，雑な草稿をていねいに読んでくださり，誤りを指摘してくださった査読者の方に感謝します．

参考文献

J.B.Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.

小平邦彦，複素多様体論 I，II，III，岩波講座基礎数学，岩波書店，1981.

松島与三，多様体入門，裳華房，1965.

E.M.Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, 1970.

要　旨

連続な関数 $f(x)$ の定積分により定義された関数は，微分可能であり，その導関数は元の関数の $f(x)$ になります．つまり，リーマン積分により定義される関数は，積分される関数の理論的な不定積分です．これは微分積分法の基本定理と呼ばれる解析学の基本的な事実ですが，この事実の高次元への拡張も当然考えられています．たとえば，ルベーグは，一般の n 次元のユークリッド空間において定義されたルベーグ積分可能な関数に対してこの基本定理を拡張しています．それとは別に，微分を全微分として捉える観点からの高次元への拡張が考えられており，Poincaré' の補題として，多様体上の微分形式を対象とするところまで拡張されています．しかし，この拡張はルベーグによる解析的な拡張とは違って，代数的な色彩が強くなります．そして解析的な部分はやはり古典的な1次元の基本定理に基づいています．このノートは，この古典的な定理を，自分なりの証明をつけながら，再考してみようという試みです．