「海―自然と文化」東海大学紀要海洋学部　第３巻第１号　61-68頁（2005）
Journal of The School of Marine Science and Technology, Vol.3 No.1 pp. 61-68, 2005

# 数学教育における『問題解決』と創造性育成
## ― ４次元超立方体をノートに描く ―

渡辺　信*1

# The method of Problem Solving and the creativity on mathematics
## ―Drawing the 4-dimensional hyper cube on the notebook―

Shin WATANABE

**Abstract**

In our college we want to teach every subject with the method of problem solving. This paper is the 4-dimensional world on the mathematical activity. And we show some examples which are made by my students, the counting objects with Pascal's Triangle and the path numbers in the 4-dimensional cube. In our class the subject is the 4 dimensional world. We cannot understand the 4-dimensional world. In Algebra or Linear Algebra, we used higher dimensional world that is n- dimension. In the creativity mind, we must learn the knowledge very widely. We want to make the new knowledge in mathematical lessons. It is very strong forces to see the concrete objects.

## １．授業の２面性

授業を展開するに当たり，その授業の目標を明確にする必要がある．このために授業の方法・内容等を提示したシラバスが存在する．以前はあまり意識しなかった点で，授業にはその目的によって２面的であると考えられる．ひとつは今までの多くの授業が行っているように，いかにして新しい知識を学生に伝達するかを試みる．知識の伝達には現在行われている授業形態は効率がよい．そして，大学の使命もこの知識伝達は欠かすことのできない事柄である．この授業に対して，学生が積極的に自ら新しい知識を作り出すことを，目標とした授業方式である．ゼミナール形式はこの学生の主体的活動を意識した方式であろう．今回の授業では，ゼミナール形式はとらず，普通授業の形態で学生による発見が可能になるように意識して授業を進めた．そして，東海大学が目指す授業として掲げた『問題解決』方式はこのような学生の主体性を重視した授業を指し示していると考えられる．大学の授業は知識伝達に重点が置かれ，学生による定理発見はおそらく不可能な問題として考えられている．特に，自然科学の目覚しい発展は，その内容理解のためには，授業の展開は急ぐ必要があり，のんびりと学生に任せるには時間がない．シラバスの表記内容には，授業展開の内容が本の目次のように示されていて，授業でどのような知識を身に付けるべきかの事柄を示しているものが多い．積極的に学生の参加できる授業のあり方を問うことが必要であることを示し，この活動において学生の創造性育成も可能となる．

## ２．今回の授業紹介

現代教養科目には文系学生に『数理基礎論』を選択必修で課している．この科目を選択する学生は少ない．その理由としてはいろいろ考えられる．学生にとって講義名称から授業内容を想像したときに，この名称では堅苦しい．『数理基礎論』という名称は数学から離れてしまった最近の文系学生にとっては，数学嫌いの延長線上にあって好感は持てないであろう．数理基礎論という名称から考えられることは，数学を中心とした授業であり，内容は高校までの数学を意識する．文系に進んだ学生の多くは，数学嫌いが文系選択の原因をなしていることから，数学を再び学習しようとはしない．４月の１セメスターで選択する学生

2005年５月16日受理
＊1　東海大学清水教養教育センター（General Education Program Center, Shimizu Campus, Tokai University）

は，数学の授業の延長を意識してくる．計算をして問題の答えを求める楽しさを味わうことを期待する．文系学生の選択者数が少ないのは当然であろう．そこで，この授業を問題解決の授業へと展開することを試みた．授業においての目的は，知識を与えることを前提とはしない．学生が授業に積極的に参加し，自らが知識を作り出す体験が可能な授業を展開したい．このような授業の可能性は，その授業の主体的な活動を学生に委ねることが必要になる．教師が前面に出ることを避け，学生が生き生きと授業に関わることが大切である．

このような学生の授業参加の可能性は，授業のシラバスが重要な学生への補助になる．受講生にとって，これは数学なのかと疑う可能性もあるが，数学の知識を重視するのではなく，学生自らが数学的思考をすることに目標を設定する．数学の知識が増えることを前提とはしない．学生が数学の面白さを肌で感じ取ることが目標であり，知識の量をはじめから前提とはしない．授業についてはシラバスを参照することにするが，いくつかの特色を明示しておく．

○授業対象
　政経・教養学部
○授業テーマ
　文化の中の数学の活用
　―数学が身の回りでいかに使われているかを検討する－
○授業形態
　教室での一斉授業
　黒板・OHP あまり使用しない
○授業参加学生（新入生が中心）
○授業の積み重ねを意識しない（一回完結型）
○授業内容は次の分野を扱う
　⑴　４次元を理解
　⑵　グラフを解釈できる（微積分の原理理解）
　⑶　数学を楽しむ
　⑷　統計的なものの見方を養う
○授業評価のために　自己評価を基本とする
　⑴　授業後の質問記入
　⑵　授業の参加重視
　⑶　一週間後までに授業を受けて考えたことを提出
　⑷　課題レポート
　⑸　試験(感想を中心記述)
○授業課題
　⑴「科学館・博物館で数学を見つける」ために科学館・博物館を見学し，その感想レポート
　⑵『これって，数学？』の読書感想
○成績評価
　今までの授業では重要な知識の習熟度を試験で客観的に評価することを重視していたが，今回の授業ではより主観的な評価になる．授業に出席することが重要であり，その授業にいかに参加したかを問う．

『数理基礎論』シラバスからの引用

## 3．授業展開

### ⑴ 問題解決授業のために

問題解決の方法が授業方法として成り立つためには，学生自らが積極的に活動する必要がある．今までの知識伝達的な授業では，学生は何をやっていいのかわからない．この問題解決の授業にすることは，創造性豊かな教育を実現したい．このためには授業における主体性を学生に求めたい．今までの授業のままで，学生にすべてを要求することは不可能であり，授業を始めるにあたり学生が考えるための準備，補助手段が必要になる．この思考のための準備には，学生にとっての動機付けと助けになる補助教材が重要である．学生が主体的に活動するための補助手段が必要であると言える．数学的知識も数学的な問題も何もない状況で，新しいことを作り出すことはできない．数学的な試行錯誤が行われることは，今までの知識伝達の授業では起こりえない．自らが考える楽しさを体得するための必要なものは，現在の授業では何一つ準備はできていない．まず，数学に対する興味関心が乏しいことが数学から離れているということを如実に物語っている．それと日本の数学教育では考えるための補助教材が乏しい．教科書は薄く，説明がない状態で教師による解説が伴わなくては内容理解は困難である．学生が一人で読んで書かれている内容を理解できるようには書かれてはいない．この問題解決の授業を行うために必要な学生の思考を助ける補助教材・道具はほとんどない．新しい試みとしての授業形式に対する教育の環境整備は不可能に近い．補助的な教具の導入が不可能なこと以上に深刻な問題は，学生が自ら本を読むなり，図書館で調べるなりの訓練ができていない．安易なインターネットに頼りきっている状況では，知識伝達の授業に戻る危険性がある．今回の授業では，興味関心を引くための動機付けをすることに重点を置くこととした．

### ⑵ 動機付けは数学の周辺から

数学を教育するに当たり，数学を学びたいと思うようにならなくては，学生が自ら考えることを期待できない．授業ではすぐにでも数学そのものに授業の中心を置きたいが，集まってきた文系の学生にとって数学がどこに存在するのかを知ってもらいたい．そこで，今回の動機付けにあたる部分を，絵画の「数学的な歴史」から始めることにした．人がいかに立体を平面に描き写すかの努力を具体的な事例から説明していくことにした．そして，絵画の歴史を追うことによって，その中に隠れた人々の数学的思考力のすばらしさを知ることが重要である．

エジプトの絵を見ることによって，その不自然さを探すことから始め，西洋遠近法の確立からピカソ・エッシャーへの流れを実際の絵画を眺めながら興味関心を数学に向けることを試みた．

エジプト絵画　立体感を表す努力
横向きの顔・足首・正面の肩
↓
不思議な世界の発見
西洋遠近法の確立
現在の絵画教育ではこの方法を学ぶ
3次元世界を2次元世界に描くこと
↓
レオナルド・ダ・ビンチによる確立
次の絵画構成は何を考えるか
問題設定　4次元世界を2次元世界に描く
4次元とは何か
ピカソの絵のすごさは何か？
↓
エッシャーはだまし絵か？
ピカソ・エッシャーによる絵画実験
4次元世界の表現の完成者として

次元から眺めた絵画について（概観）

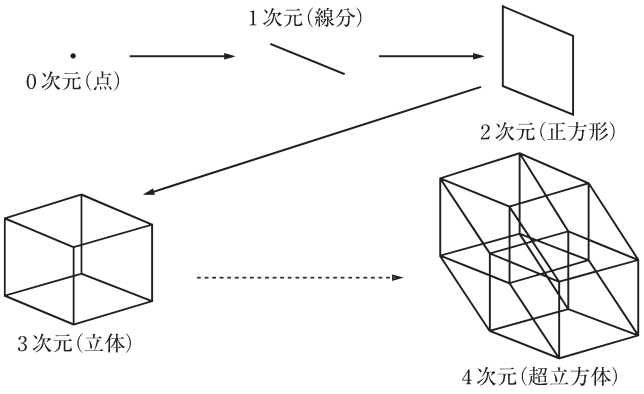
4次元の存在を理解するために数学のベクトルの説明から入ることも可能かもしれないが，あくまでも数学の学習をしたいと思うための動機付けに，非常に多くの時間をかけてきた．この結果，数学を知ってみたい，数学に近づきたいと思う気持ちを植えつけることができたと思う．

### (3) 授業に参加するということ

最近の学生は授業に出席することは，単位習得のための重要な手段と考えている．おそらく出席する学生は授業に出席することが，評価の得点に加算されていることによって，学生は仕方なく授業に出てくる．授業出席が成績評価にとって重要であり，学生を管理する授業が多くなった．また，学生の管理が出席点として行われているともいえよう．授業に参加したくなること，管理された状況ではなく自らが授業に興味を持って出席することが重要である．現在行われている授業形態である新しい知識を次々に与えられる伝達を重視する状況では，学生自らが考えることは不可能に近い．しかし，すでに知っていることを基盤にして，自分でも考えることができるような状況設定を試みたい．学生による試行錯誤を繰り返す思考方法においては，自らが考えることのできる具体的な「場」が必要である．その「場」の設定が絵画の手法の歴史を数学的に眺めることによって設けられた．絵画を見ることが学生の考える具体的な「場」にしたい．絵画は3次元空間のものと2次元の紙の上への写像であり，ピカソの出現によって4次元を意識させることができる．

数学的な4次元世界に興味を持って，実際に4次元超立方体をノートに描くことを課題にして取り組むことにしたときにも，多くの学生は絵画の世界にその思考の場を設定していたかもしれない．授業に参加することによってはじめて身に付くことを，重要視していくことが，授業を行うために必要なことである．4次元を描くための方法論を，

n次元を動かして（n+1）次元を表現




4次元を描く方法の設定
（実線：解説部分，点線：学生類推部分）

することとして設定した．

この方法論を設定したことは，授業を受けている学生の思考方法を決定している．授業に出席することは，その授業での解説・方法論から逸脱することになれば，授業に参加していたとは認められない．授業からの逸脱は，まず授業を理解した後に行われることが順序である．授業に参加することは，その授業から何を得たかが問われるのではなかろうか．最近の教育環境はインターネットの出現により，学生自らが考える必要がなくなっている．与えられた課題をインターネットで「検索」することによってなんでも得ることができる世界に学生は生活している．そして，検索することによって，何でもわかってしまった気になることもできる．最近目に付くようになったレポートの書き方の方法として興味深いことは，インターネットの検索に頼ることである．高校の新しい教科である「情報」や「総合学習」のコンピュータ利用方法が，調べることを重視してインターネットを用いていることが影響している可能性がある．この調べる作業が，学生の思考訓練を奪い去っているのではなかろうか．自らが考える楽しみを奪い取ってしまうのであれば教育活動にとって大きな問題になる．今後のインターネット活用の課題があると共に，今までの授業方法に大きな影響をおよぼしていると考えられる．授業に参加しない学生は4次元を描くための手段をインターネットで探し，その結果を持って満足することは後で触れる．授業に参加することによって，方向性が敷かれていくことの問題性を指摘する面もあるが，授業に参加しその中で学生は考えるべきである．授業で学んだことを用いて，自らが考えたことをレポートにする課題は，いかに授業に参加しこの準備された方法論を理解したかを知るためであった．授業内容をまとめるのではなく，授業に参加したことを重視する手段としての課題が各授業毎に設定されていたことには学生は気がつかなかった．

### (4) 4次元をノートに描く

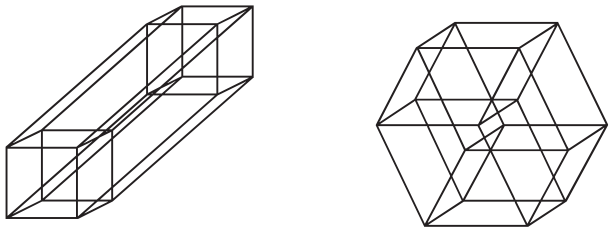
4次元の表現の方法論を設定して，学生にとっての課題が「4次元の超立方体をノートに描く」問題であった．こ

のレポートの模範解答を与えないままに，学生の活動に任せた結果，おおよそ次のような活動をした．

1週間後　4次元描けた？
学生の反応は自分たちで描くのではなく答えを求めている
答えは与えられるものと信じて疑わない
↓ 自分で考えて描くことを求める
2週間後　4次元描けた？
描くことが出来た学生が興奮して図を見せる．表情は明るく晴れやかである
周りの反応は冷ややかであり，描いた学生とは好対照である
↓ 描いた人がいるのだから自分にも（競争心）
答えを教えてもらうことを拒む学生が出現
まったく思考の停止する学生
3週間後　4次元描けた？
何人かの学生が自信なさそうに持ってくる
多くの学生は課題を忘れて興味が薄れている
提出された4次元の表現の方法が違う
インターネットで調べてそのまま印刷
自信がなく後ろめたい

学生のレポート作成活動の様子

授業を行ってみて，自らが積極的に考えることを重視したにもかかわらず，学生は「考えること」から逃避してしまった．考え抜くことは期待できなくても，答えだけを求める態度が印象的であった．答えだけを求めるための道具として，インターネットが活用されている．考えることを止めて，安易な方向へと走ってはいないであろうか．インターネットが学生が自ら考えるという重要な行為を奪い取っていることが問題である．そして，最近の学生はこの検索による方法を図書館で調べることと同じと考えている．まったく前後関係なく，検索結果を印刷するために課題はできているようには見えても自分の力とはなっていない．学生が考える楽しさを体得して欲しい．最近の学生は簡単に自ら考えることを放棄していないであろうか．



学生の描いた4次元の図

### (5) 思考停止の学生対策はなし

答えを捜し求める段階での興味深い学生の動きを見ることができる．4次元を描く方法の設定は理解できても，その考え方に納得できないために拒絶反応を起こす．新しい方向を設定することによって，軸が増えていく方法を知った．3次元までは平面に描くことを学生はまったく拒まない．3次元の座標軸の書き方については，3本の座標軸が原点で直交していることを認めることが出来る．具体的に「見る」ことができるためである．抽象的な思考はここにはない．あくまでも具体的なものを見ている．「見る」ということが物事を理解し，納得することにつながっていると考えられる．非常に雑に書かれた2次元上の立体図を，立体的に見ることができることの訓練はできている．平面に書かれた立体の図を立体として認めることができるのは抽象性からではない．この3次元の図から4次元に進む段階で，一生懸命に考えるために起こる理解不可能なための思考停止現象が一部の学生にみられることに注目したい．この思考停止をする学生は，新しく加えられる座標軸を設定することを認めることができない．認めないというよりはもっと強固な信念が働いて拒否するといったほうがあたっている．わかろうとしないというよりは，4本が一点ですべて直交していることを不審に思い，この現実不可能性に戸惑って先に進むことができないでいる．このような学生に対する処置は数学の授業では，そのまま置き去りにされていくに違いない．計算ができない理由も方法はわかっていても納得できないということがあるらしい．そして，数学がわからないという状況になって，数学から離れていく．文系の学生の中で数学が嫌いになった学生は，「何故？」と思い込んでその場で思考停止になったことが原因であると語る学生がいる．このような思考停止になったままで待っている学生の存在の話は聞いていたが，現実に直面したときにいかにして教育をすべきかは残念ながらわからなかった．数学教育活動だけではなく，いろいろな場面で「思考停止」の状況に落ち込むことがあるらしい．このような状況をいかに教育していくかはその時々で違う可能性がある．試行錯誤を繰り返すことによって問題解決を図る設定は，自らが考えることを重視している．思考停止が起こらないように，各人が興味関心がある場を設定することと，考えられる前提となる「場」を用意することが重要であることがわかった．今回の動機付けに用いた絵画の世界にも，絵画の興味・関心がないために数学に接近できないことも見受けられた．学生がなぜ思考停止の状況に落ち込むかを理解できないために，教育指導の方法を見失った体験をした．

### (6) 授業から作り出されたこと

（イ）立体の点・辺・面等の数を数える

この問題は3次元以下の図形（立作）については特に新しいことはない．どの次元についても「立体」と総称する

慣習がある．この名称として立体を0次元でも使うことはなかなか受け入れにくい．立体という名称は暗黙のうちに3次元の形を意識してしまう．名称の持つ固定観念を壊すことは難しい．あえて，0次元にまで「立体」という名称にこだわることもなかった．授業の目的であるまったく見ることのできない4次元超立方体の姿を作り出すことに多くの学生は納得する．次の段階へと進み，各次元の立体の点・辺・面等の個数を数え上げる問題で，この表を作るのは，証明を意識させなければ問題はやさしい．しかし，なぜ，数字が決まっていくかを考え，納得することは重要な数学的活動である．

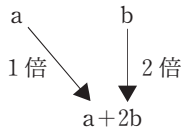
| 個　数 | 点 | 辺 | 面 | 立体 | 超立体 | 超立体 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 点 | 1 | | | | | |
| 線分 | 2 | 1 | | | | |
| 正方形 | 4 | 4 | 1 | | | |
| 立方体 | 8 | 12 | 6 | 1 | | |
| 4超立方体 | 16 | 32 | 24 | 8 | 1 | |
| 5超立方体 | 32 | 80 | 80 | 40 | 10 | 1 |

立体の点・辺・面等の個数

立体の点・辺・面等の個数を表すこの表を作り出した学生の次の作業は，各列の総和の規則性の発見と，表をパスカルの三角形とみなすことであった．このパスカルの三角形についての活動は高校の授業の影響を受け，思考の訓練ができていて考える方向を示すことは必要なかった．各列の総和を求めることも，高校の授業で扱った問題と類似していて多くの学生の考える問題であった．パスカルの三角形は数学の授業で印象深い内容であったことと思われる．

1
2　1
4　4　1
8　12　6　1
16　32　24　8　1
32　80　80　40　10　1
64　192　240　160　60　12　1

個数のパスカルの三角形の表示




数字の持つ規則

パスカルの三角形を意識して並べた数字から，どのような式の展開から作られているかの理解は難しかった．4次元超立方体を描く方法から数式を作成することは，高校までの数学として慣れ親しんだ問題の逆問題である．数字の並ぶ規則は発見できても，この規則を持つ数式を作り出すことは難しかった．数学の持つ規則性をみつけ出し，その規則をみたす数式作りを求めることはできなかった．結果的には $(2+d)^n$ を展開することと同じである．展開の計算例としては，

$$(2+d)^3=8d^0+12d^1+6d^2+1d^3 \text{ の係数}$$

としてみることができる．この展開式の係数が表に示されている．この展開でも覚えていたはずの公式を思い出そうとする学生が多く，思い出せないままに展開不可能であることがわかった．数学は暗記科目として身に付いていて考える根拠を失っている．最近の数学は，コンピュータをはじめとした数式処理を扱うソフトが自由に使えるようになって逆問題が非常に増えてきた．ここにも数学教育の今後の方向性を考えさせられるヒントがあることがわかる．

（ロ）立体の点・辺・面等の数の総和を作る

この個数を示すパスカルの三角形の各段の総和を作ることも高校の数学の問題からの派生である．かつてやった事柄を思い出しながら数学を考えていて，思い出すことができないことは手が出ない．どのような問題を学生が覚えているかによって，数学的思考の方向性が決まってしまう．今までの数学教育において，面白かったこと・心引かれたことに多くの学生が共通して持つ数学思考の方向性を持っていると感じた．

① 簡単な公式は覚えている
$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
簡単な微分公式 $\frac{d}{dx}x^2=2x$

② 非常によく使った公式は覚えている
$\sin^2x+\cos^2x=1$
簡単な微分公式 $\frac{d}{dx}x^2=2x$
ただし，なぜこの公式が導き出されたかはわからないために応用力はない．この顕著な例は微分積分の計算である．

③ 不思議と覚えていることとしてパスカルの三角形が上げられる
このようによく覚えていることはおそらく興味関心を示した数学であって，多くの箇所に存在する．なぜ興味を持つかは日本の数学教育を考える上では重要な課題である．

パスカルの各列の総和は $2^n$ であった．今回は $3^n$ になることがわかり何か規則が存在するであろうという感覚を持つようにはなった．展開式を作ることができなかったために結果は証明をすることが難しかったが，何人かは数字の持つ規則に戻って考えることを熱心に行ってみようとしていた．数学が覚えることだけではないことを理解できると共に，考えるという作業の面白さを体験できた．何かを自分で進んで考えてみようとする活動は，総合教育で重要な課題である．高校までの教育の変化は，大学教育にも大き

な変化をもたらすに違いない．この視点から眺めたときに，高校の総合科目は今後の教育の方法を変える可能性を秘めていると考えられる．不思議と思う気持ちが次の課題への大きな原動力になるが，数学ではこの段階に証明が入り，興味を失うことになる可能性もある．

| | 個数の総和 |
|---|---|
| 点 | 1　＝　$1=3^0$ |
| 線分 | 2＋1　＝　$3=3^1$ |
| 正方形 | 4＋4＋1　＝　$9=3^2$ |
| 立方体 | 8＋12＋6＋1　＝　$27=3^3$ |
| 4超立方体 | 16＋32＋24＋8＋1　＝　$81=3^4$ |
| 5超立方体 | 32＋80＋80＋40＋10＋1＝243＝$3^5$ |

（ハ）対角点への経路を数える

次に問題として出てきたことは，立方体の点Aからその対角点Bへ至る方法は幾通りあるかという問題との係わりであった．この問題は有名なパズルの問題からの延長であり，パスカルの三角形と関連していることも興味深い．この立体図形を考えることから4次元へと向かうこととなった．

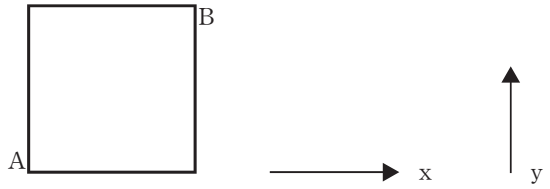
この問題の解決のためには，数学的な表現としてxは横方向を示し，yは縦方向を表す．どの経路を通っても，横方向には4回・縦軸方向には3回使う．$(x+y)^7$ の $x^4y^3$ の係数を求めればよいことはよく知られている．この問題の発展として立体の対角点へ至る道の数え上げの問題が作り出され，次の解答を得る．このパズルも高校で実際に考えてきたことであり，この問題を立体の対角点への経路を数え上げとすることは難しくなく発展した．解の結果を示すことにする．

1次元の場合

$(x)^1 \longrightarrow 1x$ であり 1＝1！これは簡単．これをこの問題ではじめにもってくることはまず考えられない．後から，整理することによってこの解が始めになる．しかし数学の教科書を読むならば，おそらくこの解から書き始められていてもおかしくはない．

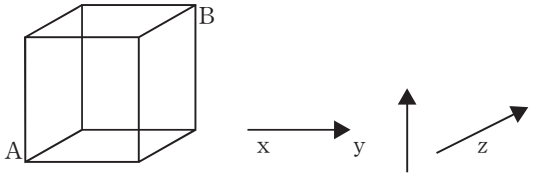
2次元の場合

$(x+y)^2 \longrightarrow 2xy$ であり，2＝2！が答えになる．階乗もつける必要性はないにもかかわらず，階乗をつけているのは先を見越しているためで学生の思考を超えてしまってはじめから与えている．




3次元の場合

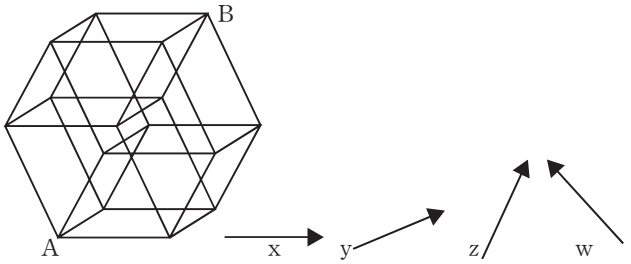
$(x+y+z)^3 \longrightarrow 6xyz$ 答えは 6＝3！通り．




4次元の場合

目に見えないが，そんなに難しくはなく拡張できる．この拡張の思考方法に数学的な感じをとらえることが出来るのかもしれない．学生の様子はそんなに難しい問題としてではなく，この問題を作り出し，みずから答えを求めている．答えは計算をする前以前に気がついているかもしれない．

$(x+y+z+w)^4 \longrightarrow 24xyzw$ この展開の一部分を行って，24＝4！となる．




問題はn次元を数学は扱い，一般化することによって $(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^n$ の展開が出来ればよいことがわかる．特にこの展開の一部分の計算が出来るかは，パスカルの三角形の理解だけが問題であった．結果は $x_1x_2x_3\cdots x_n$ の係数 n! を求めることで，この問題にたどりついたことによって授業は面白かった．一般化することができて数学らしい解決になった．証明はそのまま説明を書き換えることによってできることもわかった．

**(7) 授業評価**

評価は自己評価を基準とした．今までの評価は学生にとって常に与えられるものであり，自己評価の可能性を心配した．全員が正しく自己を見つめることができるとは思わなかったが，結果をみると心配することはあまりなかった．おそらく，今までの評価とそんなに変わってはいない得点が付いたと思われる．それ以上に，数学を考えて感動したこと・うれしかったこと・本気になって考えたことな

どに自らが喜んでいたことがそのまま評価になった．自分で考えることの楽しさは，結論が出なくてもよい．今までの評価は結論を試験の得点としてみることが中心であった．４次元超立方体の絵をノートに描くことができた学生は，評価を求める以上に自己満足している．評価を付ける以前の状況で，授業に参加したことを満足している．楽しかった経験，考えたことの満足感，自らが何かを成し遂げた達成感が評価に大きな意味を持っている．知識の伝承に終わっていてはこのような評価基準にはならない．それだけに，学生の毎回の授業で学生個々といかに接することができるかが必要になる．評価することは，試験の得点でわかる知識中心の授業で付ける評価はあまり気にならないが，あまり客観的なデータがない評価には自信がない．しかし学生自身による自己評価は学生の主観的な面が強いが，おそらく心配はない評価を付けることができた．以前，学生による評価との比較をしたが，ほとんど自己評価と同じになった．しかし，評価の仕方，自己を見つめる訓練をしておくことが必要である．これからの評価は自己評価を中心にすることを考える必要がある．数学の評価を自己評価できるようにすると共に，自己評価によって自己規制をすることが重要になるであろう．前者は自己評価をすることによって評価の重要性を再確認することができる．また，今まで外側からの評価は学生を規制していることにもなっていた．評価が行動を縛り付けるのではなく，自己評価によって与えられた評価の重要性を知ることにもなる．自己評価は自己規制ができる習慣を身に付けられることにもなる．

### (8) 教師の役割は何か

問題解決において，教師はどのような役割を持つのであろうか．知識伝達の数学教育では教師の役割は簡単である．知識を伝える教師とその知識を与えられる学生の役割分担がはっきりしている．あくまでも学生は知識を受け取ることによって，授業を進めることが可能である．しかし，問題解決の授業においては，教師が知っていることを学生に与えてはいけない．このことは授業を進めるにあたり，そんなにやさしいことではない．教師の知っているものを簡単に伝えてしまうし，伝えたくなるものである．始めに4次元超立方体を描いた学生はその図を誰かに説明したかったという．そして，自分の描いた図を見てもらいたい，話を聞いてもらいたいと思ったという．その話を聞く友達はあまりおもしろくない話を聞くことになったという．一般に人は自分だけが知っていることを，誰かに伝えたいという欲望を持つという．教師もまったく同じであり，伝えてしまう・与えてしまうことの方が簡単である．問題解決の授業方法では，与えるのではなく学生の持っている力を引き出すことが必要である．そのためには，教師は授業において，「待つ」ことが重要である．もう少し違う言葉で述べれば，学生から教師が学ぶことである．今までの授業では教師が一方的に知識を学生に与えるという方式を取った．しかし，今回は学生の考えたものを教師が教えてもらう方式に変更する必要がある．今までの授業では学生に学ぶということはなかった．しかし，今回の問題解決の授業では，次にどのように発展していくかはわからない．授業計画ではそのときの授業の内容を決めているが，おそらく授業の中で方向性の変更を学生から求められる．今回の学生の発見した問題は，どのような問題になるかは初めから教師の期待通りにはならない．それだけに授業を進めながら，授業というものがこんなに楽しいものかという経験を教師側がしているのではなかろうか．授業は楽しいという感覚は，学生の感想であって教師のものではないと思われる．しかし，問題解決の授業では，最も楽しいのは教師であり，最も授業の進展を心配しているのも教師であった．決まった事柄を決められた時間内に，知識を与えることを目標として行う授業では得ることが出来ない緊張感を授業を行いながら感じ取っていた．そして，多くの問題に対して解けないままに放置する可能性もある．次の授業までの学生から与えられた課題があり，一生懸命にその問題を考えなくてはならない．そして，問題が解けても解けなくても，次の時間を迎えなくてはならなかった．その時に持っている教師の答えを学生に与えてはいけない．これは教師にとっては難しいことであった．

## 4．将来の授業のあり方

今まで行われてきた数学の授業では，いかにして新しい知識を伝えるかを中心問題としてきた．抽象的な数学を概念として与えるのでは理解できないことから，計算技能の訓練から教育がなされてきた．計算訓練をすることによって自ずと数学そのものが理解できるということになる．このような授業方式が出来上がっているために，評価は計算ができるかどうかを確かめることで客観的な評価と一致する．計算ができることは，数学概念が理解できる第一歩であった．しかし，計算ができても数学の主張することが何かを理解できない．この例としては線形代数の授業が物語っている．非常に多くの学生は計算ができるが，数学には程遠い．問題解決の授業が目指すことは，数学の内容の理解である．すでに完成している体系的な数学は，はじめから一つ一つ積み上げながら考えていくことは困難である．そこで，整然とした知識を理解しやすく与えていくことが重要である．この段階で教育が停止していることの改善が，問題解決の授業方法として追いかけられているのではなかろうか．知識を身に付けるためには，自分で考えることができる必要がある．常に知識は自分の力で考え出さなくてはいけないという前提はない．しかし，いつでも自分で考える力が身についていることが，これからの授業での課題になるに違いない．

数学教育の発展的段階を眺めてきたときに，最近最もお

きな変化は45年位前に起こった数学教育現代化運動であった．数学教育としては大きな失敗として評価されている．このときに教育する内容を現代的数学で表現する試みが，失敗の原因ではあった．もうひとつ我々が忘れてならないことは，数学教育において創造性豊かな教育を目指したことである．数学教育現代化によって数学教育は知識の伝承だけではなく，いかにして数学を考えるかを問うた．ここに問題解決の授業の出発点があった．この数学教育現代化の運動の失敗が数学教育を，知識重視の教育に後戻りさせてしまった．特に日本の数学教育にとって，計算軽視の教育は不安であった．計算を重視することで成り立っていた教育体系の崩壊は，数学教育全体の問題点であった．その後，アメリカの数学教育では「技術革新」を取り込んだ教育がなされ，学生・生徒の補助になる教育環境の整備がなされた．教科書とコンピュータが数学教育にとって重要な補助的道具として活用された．個々で明確に現れた教育思想が，Do Math としての問題解決の授業であった．学生が考えるための補助的な手段が整って初めて授業を学生の手にゆだねる準備ができた．日本ではこの環境を整備することなく，問題解決という言葉だけを取り込んだ．小学校の教育は問題解決を重んじる授業に移行し，生徒が楽しく授業を受けている．この授業形態はいまだに中学校以降にはつながらない．抽象的な内容を具体的な事柄を見ないで，ただ考えるということは不可能である．この不可能なことを可能にするためには，学生が思考するための補助的な道具をいかに用意するかであろう．今回の授業では周辺機器は導入できないことから，抽象的な事柄を考えるための「動機付け」を積極的に行った．考える「場」を設定することが環境整備であった．

問題解決の授業を行うためには，まだ多くの困難が残されている．学生に考えることを強要しても，考える基盤がまだ準備されていない．抽象的な数学の教育を，数学が抽象的な事柄を扱うということで教育することは難しい．特に学生の思考が可能なことは，具体的な世界に学生がいる必要がある．実際にものが見える世界は考えられる．これが３次元の世界であり，抽象化された４次元は見えない．４次元を見ることができるのは簡単ではない．その見えない世界を見えないままに訓練しても何も収穫はない．今までの授業はこの見えない世界を見えないままに教育しているのではなかろうか．その教育を具体的な世界に引き戻して，考える訓練をすることは非常に興味深い．いままでの教育では得られなかった「思考することの重要性」を問題解決としての授業で学生と共に楽しむことができた．ここに創造的活動が生れ，創造性育成が可能になる．

## 参考文献


(1) 岡本太郎　ピカソ　新潮社文庫　1953

(2) H.S.M.Coxeter Twelve Geometric Essays Southern Illinois University Press 1968

(3) 東海大学春セメ用シラバス　現代教養科目「数理基論」2004

(4) 渡辺信　教育の二面性について－「計算の原理を理解」と「サッカーボールを作る」－第30回数学教育談話会 2003

(5) 渡辺信　４次元超立体をノートに書こう―文系の授業風景―　第42回数学教育談話会　2004

(6) 渡辺信　生徒の参加する授業―東海大学附属小学校授業見学記－　第９回算数・数学交流会　2005

(7) 渡辺信　数学のよい問題が生徒の考えを引き出す－確かな数学力を向上させる研究　数学教育の会 数学教育研究 第７号　P. 129-136　2005

(8) 渡辺信　学生の求める授業とその自己評価　東海大学教育研究所研究資料集　第12号　P. 102-112　2005


## 要　旨


問題解決の授業の重要性を，実際に行ってきた授業を参考にして考察した．特に数学教育は抽象的な事柄を扱うがゆえに，問題解決の授業を行うことは重要なことであることがわかった．具体的に４次元世界を見ることはできない．しかし，数学ではｎ次元世界をいとも簡単に扱う．結果的には何も理解できないままに，授業は終わってしまい評価される．今，数学教育をはじめとして多くの授業が知識伝達になっていることを改めて，問題解決の授業のあり方を問う必要がある．問題解決の授業を行うにあたり必要なことは，授業の環境整備である．何も補助的手段のない状況で学生にただ考えることを強要しても，考える素地がない．考えることの重視は，考える「場」を設定すること・考える補助的な道具を与えることである．現在の教育環境を改める必要性を感じると共に，日本の教育の欠点は「問題解決」という言葉だけが独り歩きしていることである．授業を改善することによって，学生の考える姿勢を身につけることが可能となり，創造性育成の方向が明確になる．学生が考えることによって授業展開が行なわれ，学生によって作り出された数学を教師と共に考え楽しむ授業の可能性を求めることが可能になった．