「海一自然と文化」東海大学紀要海洋学部　第６巻第１号　107-117頁（2008）
Journal of The School of Marine Science and Technology, Tokai University, Vol.6, No.1, pp. 107-117, 2008

複合型二周波同軸集束音源の非線形音場

斎藤繁実*1・秋山いわき*2・吉住夏輝*2

Nonlinear Acoustic Field of Composite-Type Two-Frequency Coaxial Focusing Source

Shigemi SAITO, Iwaki AKIYAMA and Natsuki YOSHIZUMI

Abstract

To effectively eliminate the speckle noise in ultrasonic images, the present authors are studying a method of superposing many images generated with different frequencies. In order to easily achieve such a condition, the use of two sound beams emanated from a two-frequency coaxial focusing source has been presented, where six sound beams with different frequencies are strongly excited; two original primary sounds, two second harmonic sounds that are generated by nonlinear transmission of each beam, and the sounds with difference and sum frequencies that are generated by nonlinear interaction of two primary waves. In this paper, the linear or quasi-linear solutions for such six sound fields are derived by successively approximated solution for the Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov equation. The analysis is performed for the field divided into two regions; a layer of water coupler and another dissipative layer modeling biological medium. While the solutions for linear components are expressed by single integration, the solutions for nonlinearly generated components are complicated ones including quadruple integrations. To facilitate the numerical computation, the latter solutions are approximated to triple integrations using integral exponential function. The validity of the present analysis is confirmed through the comparison between the computation and experiment for the acoustic field generated in water with a coaxial focusing source of 2 and 8 MHz. The analytical result for 2, 4, 6, 8 and 10 MHz sound fields agrees well with the experimentally observed ones.

１．まえがき

超音波が水などの液体中や生体組織中を伝搬すると，送波周波数の整数倍の高調波が音波の非線形現象によって発生する．この高調波を利用して，従来よりも鮮明な音響画像を得るハーモニック・イメージング（Averkiou *et al*., 1997; Ward *et al*., 1997）が広く普及してきている．また，同時に２つの周波数の音波を送波すると，その差の低い周波数で狭ビーム，広比帯域の音波が非線形伝搬のために発生するので，それで海底堆積層を透視するパラメトリック音源（Westervelt, 1963）も実用に供されている．これらの応用では，非線形伝搬によって発生した，原音と異なる周波数成分のうち，ひとつを利用している．一方，３次以上の高調波成分を加算して高解像度の超音波映像を得ようとするスーパーハーモニック・イメージングの試みもある（Bouakaz and Jong, 2003）．筆者らは，２次以上の高調波による複数の映像を重ね合わせることによって，一般に超音波映像の品質を劣化させ診断を行い難くしているスペックルノイズを除去する研究を進めてきた（Akiyama *et al*., 2005; Akiyama *et al*., 2006）．しかし，高周波で特に減衰が大きくなる生体内では，３次以上の高調波の生成度合いが低く，有効な画像の重ね合わせが困難となる欠点があった．そこで筆者らは，２周波音波を放射すれば，それらの差音，和音も含めた２次の非線形波を多種類利用できることに着目し，３次以上の高調波よりも高いレベルの

2008年１月17日受理
＊1　東海大学海洋学部環境情報工学科（Department of Environmental Information Engineering, School of Marine Science and Technology, Tokai University）
＊2　湘南工科大学工学部電気電子メディア工学科（Department of Electrical and Electronic Media Engineering, School of Engineering, Shonan Institute of Technology）

音波によって得た映像を重畳してスペックルノイズをより確実に除去する方法を提案している（Akiyama *et al*., 2008）．

本研究では簡易な装置によって多周波音波を発生させるため，同軸に配置した 2 つの音源から角周波数ω，$n\omega$（$n>1$）の音波を別々に送波すると，ビームが相互作用して角周波数（$n+1$)ωの和音，角周波数（$n-1$)ωの差音が発生するほか，角周波数 2ω，$2n\omega$ の第 2 高調波の非線形音場が形成されることを利用する．これらの非線形生成音波はいずれも 2 次波として現れるもので，元の角周波数ω，$n\omega$ の線形音場を加え，合計 6 種類の検出容易なレベルの音波が得られることになる．媒質中を伝搬する際，一般に高周波になるにつれて高減衰となること，低周波になるほど回折の影響が強くなることなどのため，n 値の設定によって，上記の 6 種類の音圧は大小関係が変わる．また，例えば $n=2$ とすると，2ω と $n\omega$ が同じになって非効率的になることからわかるように，多種類の音波を効率良く得るためには n 値の設定は重要である．さらに音源の寸法によって回折の程度も変わる．このような理由から，6 種類の音波の特性を把握するには，まず音源を一般化して表し，それからの音波の非線形伝搬を，支配方程式である Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程式（以下，KZK 方程式）を解くことによって，詳細に比較して調べる必要がある．本論文はこの目的で行った非線形音場の計算方法をまとめたものである．ここでは，医用超音波診断装置で横方向分解能を高めるために通常用いられる集束音源を想定し，それが 2 つ同軸に配置された音源をモデルとして，各音源から角周波数ω，$n\omega$ の音波が送波されたときの 6 種類の音波についての KZK 方程式の逐次近似解（Tjotta and Tjotta, 1980; Garrett *et al*., 1983）を得る．従来の非線形応用装置の解析にも適用できるよう，なるべく一般的な場合の記述を目指している．

2．解析モデル

Fig. 1 に解析のモデルを示す．円筒座標の原点に，z 軸方向に向けて同軸に設置した 2 つの球面集束音源がある．いずれも曲率半径 D の円環状音源であり，内径 r_1，外径 r_2 の音源から角周波数ω，内径 r_3，外径 r_4 の音源から角周波数 $n\omega(n>1)$ の音波が放射される．各音源面での音圧分布は均一であり，それぞれ $p_{01}\exp(-j\omega t-j\phi)$，$p_{0n}\exp(-jn\omega t)$ と仮定する．t は時間，ϕ は初期位相差である．領域 $z<z_0$ は音響カップラとして想定した水であり，密度，音速，角周波数ωにおける減衰係数をそれぞれ ρ_W，c_W，α_W とする．減衰係数は周波数の自乗則を満たすとする．また，水の非線形係数を β_W とする．領域 $z>z_0$ は，水に較べて減衰が大きい計測対象，例えば生体を一様モデル化した媒質であり，密度，音速，角周波数ωにおける減衰係数をそれぞれ ρ，c，α_1 とする．角周波数が $b\omega$ であるときの減衰係数を α_b とおく（例えば $n\omega$ では α_n）．また非線形係数を β とする．

$r_1=0$ あるいは $r_3=0$ とすると，通常の円形集束音源となり，さらに $D\to\infty$ とすれば平板音源となる．また，($n-1$)ωの音場はパラメトリック音源の解析に利用できる．したがって，ここでのモデルはかなり一般的な場合にも使える解析結果を与えることになる．

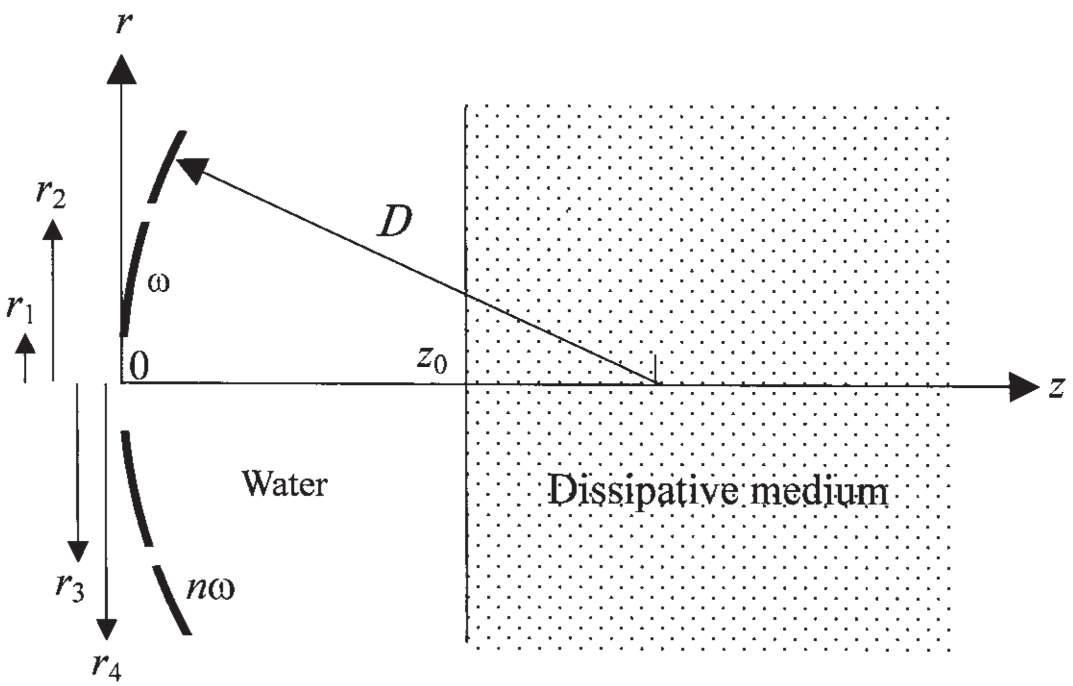

Fig. 1 Analytical model.

3．領域 $z<z_0$ における音場

3.1　角周波数 ω および $n\omega$ の音場（線形音場）

角周波数 ω の音源（内径 r_1，外径 r_2）から放射された線形音場 $p_1(r,z)\exp[j(k_W z-\omega t)]$ の複素振幅 $p_1(r,z)$ の支配方程式は，放物型近似方程式

$$\nabla_\perp^2 p_1 + j2k_W\frac{\partial p_1}{\partial z} + j2\alpha_W k_W p_1 = 0 \tag{1}$$

で与えられる．ただし，$k_W=\omega/c_W$ である．上式をハンケル変換して常微分方程式にすると，

$$-s^2\tilde{p}_1 + j2k_W\frac{d\tilde{p}_1}{dz} + j2\alpha_W k_W\tilde{p}_1 = 0. \tag{2}$$

ただし，$\tilde{p}_1=\int_0^\infty p_1(r,z)J_0(rs)\,rdr$ であり，s はハンケル変換変数である．(2)式の解 $\tilde{p}_1=C\exp\left(-j\frac{s^2}{2k_W}z-\alpha_W z\right)$ の未定係数は，$z=0$ に置かれた音源が曲率半径 D の凹面であることを考慮して，$C=\tilde{p}_1|_{z=0}=p_{01}\int_{r_1}^{r_2}\exp\left(-j\frac{k_W}{2D}r^2-j\psi\right)J_0(rs)\,rdr$ と与えられる．この C を代入して

$$\tilde{p}_1 = p_{01}\exp\left(-j\frac{s^2}{2k_W}z-\alpha_W z-j\psi\right)\int_{r_1}^{r_2}\exp\left(-j\frac{k_W}{2D}r'^2\right) J_0(r's)\,r'dr' \tag{3}$$

上式の逆ハンケル変換

$$p_1 = p_{01}\exp(-\alpha_W z-j\psi)\int_0^\infty\int_{r_1}^{r_2}\exp\left(-j\frac{z}{2k_W}s^2-j\frac{k_W}{2D}r'^2\right) J_0(r's)J_0(rs)\,r'sdr'ds \tag{4}$$

に積分公式①$\int_0^\infty\exp(jax^2)J_0(bx)J_0(cx)xdx=\frac{j}{2a}\exp\left(-j\frac{b^2+c^2}{4a}\right)J_0\left(\frac{bc}{2a}\right)$ を適用すると簡単化され，最終的に次の解を得る．これが求める ω 成分の音圧である．

$$p_1(r,z) = -j\frac{k_W p_{01}}{z}\exp(-\alpha_W z-j\varphi)\exp\left(j\frac{k_W r^2}{2z}\right)\int_{r_1}^{r_2}\exp\left[j\frac{k_W}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{D}\right)r'^2\right]J_0\left(\frac{k_W rr'}{z}\right)r'dr' \tag{5}$$

一方，角周波数 $n\omega$ の音源（内径 r_3，外径 r_4）から放射される線形音場 $p_n(r,z)\exp[jn(k_W z-\omega t)]$ の複素振幅 $p_n(r,z)$ は，支配方程式

$$\nabla_\perp^2 p_n + j2nk_W\frac{\partial p_n}{\partial z} + j2n^3\alpha_W k_W p_n = 0 \tag{6}$$

を (1) 式と同じ手順で解くことにより

$$p_n(r,\,z) = -j\frac{nk_W p_{0n}}{z}\exp(-n^2\alpha_W z)\exp\left(j\frac{nk_W r^2}{2z}\right)\int_{r_3}^{r_4}\exp\left[j\frac{nk_W}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{D}\right)r'^2\right]J_0\left(\frac{nk_W rr'}{z}\right)r'dr' \tag{7}$$

と与えられる．

3.2　角周波数 2ω および $2n\omega$ の音場（非線形第 2 高調波）

角周波数 ω の音波の第 2 高調波である非線形音場 $p_2(r,z)\exp[j2(k_W z-\omega t)]$ の複素振幅 $p_2(r,z)$ は，KZK 方程式を逐次近似した

$$\nabla_\perp^2 p_2 + j4k_W\frac{\partial p_2}{\partial z} + j16\alpha_W k_W p_2 = \frac{2\beta_W k_W^2}{\rho_W c_W^2}p_1^2 \tag{8}$$

で表される．上式のハンケル変換は

$$-s^2\tilde{p}_2 + j4k_W\frac{d\tilde{p}_2}{dz} + j16\alpha_W k_W\tilde{p}_2 = \frac{2\beta_W k_W^2}{\rho_W c_W^2}\tilde{p}_1^2 \tag{9}$$

であり，この同次解 $\tilde{p}_2=C\exp\left(-j\frac{s^2}{4k_W}z-4\alpha_W z\right)$ を上式に代入して得られる方程式

$$\frac{dC}{dz} = -j\frac{\beta_W k_W}{2\rho_W c_W^2}\tilde{p}_1^2\exp\left(j\frac{s^2}{4k_W}z+4\alpha_W z\right) \tag{10}$$

の解 C を同次解に代入して非同次解が得られる．3.1 節で求めた p_1 を用いて得られる

$$\tilde{p}_1^2 = -\frac{k_W^2 p_{01}^2}{z^2}\exp(-2\alpha_W z-j2\varphi)\int_0^\infty\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\exp\left[j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{D}\right)\right]\exp\left(j\frac{k_W r^2}{z}\right) J_0\left(\frac{k_W rx}{z}\right)J_0\left(\frac{k_W ry}{z}\right)J_0(rs)\,xyrdxdydr \tag{11}$$

をハンケル変換した $\tilde{p}_1^2$ を (9) 式に代入して

$$\tilde{p}_2 = j\frac{\beta_W k_W^3 p_{01}^2}{2\rho_W c_W^2}\exp\left(-j\frac{s^2}{4k_W}-4\alpha_W z-j2\varphi\right)\int_0^z\int_0^\infty\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\exp(2\alpha_W z')}{z'^2}\exp\left(j\frac{s^2 z'}{4k_W}\right)\exp\left[j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right] \exp\left(j\frac{k_W r'^2}{z'}\right)J_0\left(\frac{k_W xr}{z'}\right)J_0\left(\frac{k_W yr}{z'}\right)J_0(rs)\,xyrdxdydrdz' \tag{12}$$

を得る．これを逆ハンケル変換して p_2 を得る．すなわち

$$p_2 = j\frac{\beta_W k_W^3 p_{01}^2}{2\rho_W c_W^2}\exp(-4\alpha_W z-j2\varphi)\int_0^\infty\int_0^z\int_0^\infty\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\exp(2\alpha_W z')}{z'^2} \exp\left(-j\frac{z-z'}{4k_W}s^2\right)\exp\left[j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right] \exp\left(j\frac{k_W r'^2}{z'}\right)J_0\left(\frac{k_W xr'}{z'}\right)J_0\left(\frac{k_W yr'}{z'}\right)J_0(r's)J_0(rs) \,xyr'sdxdydr'dz'ds. \tag{13}$$

前掲の積分公式①および②$\int_0^\pi J_0(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\phi})\,d\phi=\pi J_0(\alpha)J_0(\beta)$ を適用すると，上式は簡単化され，

$$p_2 = j\frac{\beta_W k_W^3 p_{01}^2}{2\pi\rho_W c_W^2 z}\exp\left(-4\alpha_W z+j\frac{k_W r^2}{z}-j2\varphi\right)\int_0^z\int_0^\pi\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\exp(2\alpha_W z')}{z'^2}\exp\left[j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right] \exp\left[-j\frac{k_W F}{4}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z}\right)\right]J_0\left(\frac{k_W r}{z}\sqrt{F}\right)xydxdyd\phi dz' \tag{14}$$

となる．ただし，$F=x^2+y^2-2xy\cos\phi$ である．$2\alpha_W z\ll 1$ の範囲では，被積分項の $\exp(2\alpha_W z')$ は $1+2\alpha_W z'$ と近似できる．そのとき指数積分関数 $E_1(jx)=-\mathrm{Ci}(x)+j\mathrm{si}(x)$

を用いると，(14) 式はさらに簡単化され

$$p_2=j\frac{\beta_W k_W^3 p_{01}^2}{2\pi\rho_W c_W^2 z}\exp\left(-4\alpha_W z+j\frac{k_W r^2}{z}-j2\varphi\right)\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}$$
$$\exp\left[j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{D}\right)\right]\left[(1+j\alpha_W S)\exp\left(-j\frac{S}{2z}\right)\right.$$
$$\left.E_1\left(-j\frac{S}{2z}\right)+2\alpha_W z\right]J_0\left(\frac{k_W r}{z}\sqrt{F}\right)xydxdyd\phi \tag{15}$$

ただし，$S=\frac{k_W}{2}(x^2+y^2+2xy\cos\phi)$ である．指数積分関数の数値計算法は付録に示す．

一方，角周波数 $n\omega$ の音波の第 2 高調波として発生する非線形音場 $p_{2n}(r,z)\exp[j2n(k_W z-\omega t)]$ の複素振幅 $p_{2n}(r,z)$ は，

$$\nabla_\perp^2 p_{2n}+j4nk_W\frac{\partial p_{2n}}{\partial z}+j16n^3\alpha_W k_W p_2=\frac{2\beta_W n^2 k_W^2}{\rho_W c_W^2}p_n^2 \tag{16}$$

を (8) 式と同じ手順で解いた

$$p_{2n}=j\frac{\beta_W n^3 k_W^3 p_{0n}^2}{2\pi\rho_W c_W^2 z}\exp\left(-4n^2\alpha_W z+j\frac{nk_W r^2}{z}\right)\int_0^{z}\int_0^{\pi}\int_{r_3}^{r_4}\int_{r_3}^{r_4}$$
$$\frac{\exp(2n^2\alpha_W z')}{z'^2}\exp\left[j\frac{nk_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right]$$
$$\exp\left[-j\frac{nk_W F}{4}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z}\right)\right]J_0\left(\frac{nk_W r}{z}\sqrt{F}\right)xydxdyd\phi dz' \tag{17}$$

で表される．上式は $2n^2\alpha_W z\ll 1$ の範囲で

$$p_{2n}=j\frac{\beta_W n^3 k_W^3 p_{0n}^2}{2\pi\rho_W c_W^2 z}\exp\left(-4n^2\alpha_W z+j\frac{nk_W r^2}{z}\right)\int_0^{\pi}\int_{r_3}^{r_4}\int_{r_3}^{r_4}$$
$$\exp\left[j\frac{nk_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{D}\right)\right]$$
$$\left[(1+jn^3\alpha_W S)\exp\left(-j\frac{nS}{2z}\right)E_1\left(-j\frac{nS}{2z}\right)+2n^2\alpha_W z\right]$$
$$J_0\left(\frac{nk_W r}{z}\sqrt{F}\right)xydxdyd\phi \tag{18}$$

と簡単化される．

3.3 角周波数 $(n-1)\omega$ の音場 (差音)

角周波数 $n\omega$ の音波と角周波数 ω の音波の非線形相互作用によって発生する差周波数音場 $p_{n-1}(r,z)\exp[j(n-1)(k_W z-\omega t)]$ の複素振幅 $p_{n-1}(r,z)$ は，KZK 方程式を逐次近似した

$$\nabla_\perp^2 p_{n-1}+j2(n-1)k_W\frac{\partial p_{n-1}}{\partial z}+j2(n-1)^3\alpha_W k_W p_{n-1}$$
$$=\frac{\beta_W(n-1)^2 k_W^2}{\rho_W c_W^2}p_n p_1^* \tag{19}$$

によって表される．*印は共役複素数を表す．3.1 節で求めた p_1,p_n を用いて，3.2 節と同じ手順で方程式 (19) の解を求めると，

$$p_{n-1}=-j\frac{n(n-1)\beta_W k_W^3 p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho_W c_W^2 z}\exp[-(n-1)^2\alpha_W z+j\varphi]$$
$$\exp\left[j\frac{(n-1)k_W}{2z}r^2\right]\int_0^{z}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\exp(-2n\alpha_W z')}{z'}$$
$$\exp\left[-j\frac{k_W G}{2(n-1)}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z}\right)\right]\exp\left[j\frac{k_W(nx^2-y^2)}{2}\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right]J_0\left(\frac{k_W r\sqrt{G}}{z}\right)xydxdyd\phi dz' \tag{20}$$

ただし，$G=n^2x^2+y^2-2nxy\cos\phi$ である．$2n\alpha_W z\ll 1$ の範囲では，被積分項の $\exp(-2n\alpha_W z')$ は $1-2n\alpha_W z'$ と近似できる．このとき，さらに次のように簡単化される．

$$p_{n-1}=-j\frac{n(n-1)\beta_W k_W^3 p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho_W c_W^2 z}\exp[-(n-1)^2\alpha_W z+j\varphi]$$
$$\exp\left[j\frac{(n-1)k_W}{2z}r^2\right]\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\exp\left[j\frac{k_W(nx^2-y^2)}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{D}\right)\right]$$
$$\left[\left(1+j\frac{2n^2\alpha_W}{n-1}S\right)\exp\left(j\frac{n}{n-1}\frac{S}{z}\right)E_1\left(j\frac{n}{n-1}\frac{S}{z}\right)-2n\alpha_W z\right]$$
$$J_0\left(\frac{k_W r\sqrt{G}}{z}\right)xydxdyd\phi \tag{21}$$

3.4 角周波数 $(n+1)\omega$ の音場 (和音)

角周波数 $n\omega$ の音波と角周波数 ω の音波の非線形相互作用によって発生する和周波数音場 $p_{n+1}(r,z)\exp[j(n+1)(k_W z-\omega t)]$ の複素振幅 $p_{n+1}(r,z)$ は，KZK 方程式を逐次近似した

$$\nabla_\perp^2 p_{n+1}+j2(n+1)k_W\frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+j2(n+1)^3\alpha_W k_W p_{n+1}$$
$$=\frac{\beta_W(n+1)^2 k_W^2}{\rho_W c_W^2}p_1 p_n \tag{22}$$

を 3.2 節と同じ手順で解き，

$$p_{n+1}=j\frac{n(n+1)\beta_W k_W^3 p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho_W c_W^2 z}\exp[-(n+1)^2\alpha_W z-j\varphi]$$
$$\exp\left[j\frac{(n+1)k_W}{2z}r^2\right]\int_0^{z}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\exp(2n\alpha_W z')}{z'}$$
$$\exp\left[-j\frac{k_W G}{2(n+1)}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z}\right)\right]$$
$$\exp\left[j\frac{k_W(nx^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right]J_0\left(\frac{k_W r\sqrt{G}}{z}\right)xydxdyd\phi dz' \tag{23}$$

を得る．$2n\alpha_W z\ll 1$ の範囲で，被積分項の $\exp(2n\alpha_W z')$ は $1+2n\alpha_W z'$ と近似できる．このとき，上式は次のように簡単化される．

$$p_{n+1}=j\frac{n(n+1)\beta_W k_W^3 p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho_W c_W^2 z}\exp[-(n+1)^2\alpha_W z-j\varphi]$$
$$\exp\left[j\frac{(n+1)k_W}{2z}r^2\right]\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\exp\left[j\frac{k_W(nx^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{D}\right)\right]$$
$$\left[\left(1+j\frac{2n^2\alpha_W}{n+1}S\right)\exp\left(-j\frac{n}{n+1}\frac{S}{z}\right)E_1\left(-j\frac{n}{n+1}\frac{S}{z}\right)+2n\alpha_W z\right]$$
$$J_0\left(\frac{k_W r\sqrt{G}}{z}\right)xydxdyd\phi \tag{24}$$

4．領域 $z>z_0$ における音場

前節で求めた音圧は，計測対象である領域 $z>z_0$ の媒質に音圧透過係数

$$T=\frac{\rho c-\rho_W c_W}{\rho c+\rho_W c_W} \tag{25}$$

で入射する．したがって $z=z_0$ における音圧が前節で求めた音圧の $z=z_0$ における値の T 倍であるという境界条件を用いて $z>z_0$ での支配方程式を解けば，領域 $z>z_0$ における音場が求められる．ここでは音響映像等への応用解析のため，$+z$ 方向の進行波のみを扱い，境界面での反射波は研究の対象外としている．

4.1　角周波数 ω および $n\omega$ の音場（線形音場）

角周波数ωの線形音場 $p_1(r,z)\exp[j(kz-\omega t)]$ の複素振幅 $p_1(r,z)$ を支配する方程式は，

$$\nabla_\perp^2 p_1+j2k\frac{\partial p_1}{\partial z}+j2\alpha_1 kp_1=0 \tag{26}$$

で与えられる．ただし，$k=\omega/c$ である．ハンケル変換した方程式の解は，

$$\tilde{p}_1=C\exp\left(-j\frac{s^2}{2k}z-\alpha_1 z\right). \tag{27}$$

3.1 節の (3) 式から，境界 $z=z_0$ での $\tilde{p}_1$ が与えられるので

$$C\exp\left(-j\frac{s^2}{2k}z_0-\alpha_1 z_0\right)=p_{01}T\exp\left(-j\frac{s^2}{2k_W}z_0-\alpha_W z_0-j\varphi\right)\int_{r_1}^{r_2}\exp\left(-j\frac{k_W}{2D}r'^2\right)J_0(r's)r'dr' \tag{28}$$

が成り立つ．上式から求められる C を (27) 式に代入して得られる

$$\tilde{p}_1=p_{01}T\exp\left[-j\frac{s^2}{2k_W}z_0-j\frac{s^2}{2k}(z-z_0)-\alpha_W z_0-\alpha_1(z-z_0)-j\varphi\right]\int_{r1}^{r2}\exp\left(-j\frac{k_W}{2D}r'^2\right)J_0(r's)r'dr' \tag{29}$$

をハンケル逆変換し，さらに積分公式①を適用して簡単化することにより，最終的に

$$p_1(r,z)=-j\frac{kTp_{01}}{z-z_0+kz_0/k_W}\exp[-\alpha_W z_0-\alpha_1(z-z_0)-j\varphi]\exp\left[\left[j\frac{kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\right.\int_{r_1}^{r_2}\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{kD}\right)r'^2\right]J_0\left(\frac{krr'}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)r'dr \tag{30}$$

が得られる．

一方，角周波数 $n\omega$ の線形音場 $p_n(r,z)\exp[jn(kz-\omega t)]$ の複素振幅 $p_n(r,z)$ は，支配方程式

$$\nabla_\perp^2 p_n+j2nk\frac{\partial p_n}{\partial z}+j2n\alpha_n kp_n=0 \tag{31}$$

を (26) 式と同じ手順で解くことにより

$$p_n(r,z)=-j\frac{nkTp_{0n}}{z-z_0+kz_0/k_W}\exp[-n^2\alpha_W z_0-\alpha_n(z-z_0)]\exp\left[j\frac{nkr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_{r_3}^{r_4}\exp\left[j\frac{nk}{2}\left(\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{kD}\right)r'^2\right]J_0\left(\frac{nkrr'}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)r'dr' \tag{32}$$

と与えられる．

4.2　角周波数 2ω および $2n\omega$ の音場（非線形第 2 高調波）

角周波数 ω の音波の第 2 高調波として発生する非線形音場 $p_2(r,z)\exp[j2(kz-\omega t)]$ の複素振幅 $p_2(r,z)$ は，KZK 方程式を逐次近似した

$$\nabla_\perp^2 p_2+j4k\frac{\partial p_2}{\partial z}+j4\alpha_2 kp_2=\frac{2\beta k^2}{\rho c^2}p_1^2 \tag{33}$$

で表される．上式のハンケル変換

$$-s^2\tilde{p}_2+j4k\frac{d\tilde{p}_2}{dz}+j4\alpha_2 k\tilde{p}_2=\frac{2\beta k^2}{\rho c^2}\tilde{p}_1^2 \tag{34}$$

の同次解は $\tilde{p}_2=C\exp\left(-j\frac{s^2}{4k}z-\alpha_2 z\right)$ となる．これを上式に代入して得られる方程式

$$\frac{dC}{dz}=-j\frac{\beta k}{2\rho c^2}\tilde{p}_1^2\exp\left(j\frac{s^2}{4k}z+\alpha_2 z\right) \tag{35}$$

の解は $C=\tilde{p}_2|_{z=z_0}\exp\left(j\frac{s^2}{4k}z_0+\alpha_2 z_0\right)$

$$-j\frac{\beta k}{2\rho c^2}\int_{z_0}^{z}\tilde{p}_1^2\exp\left(j\frac{s^2}{4k}z'+\alpha_2 z'\right)dz' \tag{36}$$

4.1 節 (30) 式の p_1 を用いて

$$\tilde{p}_1{}^2=-\frac{k^2T^2p_{01}^2\exp(-j2\varphi)}{(z-z_0+kz_0/k_W)^2}\exp[-2\alpha_W z_0-2\alpha_1(z-z_0)]\int_0^\infty\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\exp\left[j\frac{k(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{kD}\right)\right]\exp\left(j\frac{kr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)J_0\left(\frac{krx}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)J_0\left(\frac{kry}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)J_0(rs)xyrdxdydr. \tag{37}$$

上式を (36) 式に代入して得たCを用いて，

$$\tilde{p}_2=j\frac{\beta_W k^3{}_W p_{01}^2T}{2\rho_W c_W{}^2}\exp\left[-j\frac{s^2}{4k_W}z_0-4\alpha_W z_0-j2\varphi-j\frac{s^2}{4k}(z-z_0)-\alpha_2(z-z_0)\right]\int_0^{z_0}\int_0^\infty\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\exp(2\alpha_W z')}{z'^2}\exp\left[j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right]\exp\left(j\frac{k_W r^2}{z'}\right)\exp\left(j\frac{s^2z'}{4k_W}\right)J_0\left(\frac{k_W xr}{z'}\right)J_0\left(\frac{k_W yr}{z'}\right)J_0(rs)xyrdxdydrdz'$$
$$+j\frac{\beta k^3p_{01}^2T^2}{2\rho c^2}\exp\left(-j\frac{s^2}{4k}z-\alpha_2 z-2\alpha_W z_0+2\alpha_1 z_0-j2\varphi\right)\int_{z_0}^{z}\int_0^\infty\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\exp[(\alpha_2-2\alpha_1)z']}{(z'-z_0+kz_0/k_W)^2}$$

$$\exp\left[j\frac{k(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{kD}\right)\right]$$
$$\exp\left(j\frac{kr^2}{z'-z_0+kz_0}\right)\exp\left(j\frac{s^2z'}{4k}\right)J_0\left(\frac{krx}{z'-z_0+kz_0/k_W}\right)$$
$$J_0\left(\frac{kry}{z'-z_0+kz_0/k_W}\right)J_0(rs)\,xyrdxdydr'dz' \tag{38}$$

これを逆ハンケル変換し，さらに積分公式①，②を適用して次の p_2 を得る．

$$p_2=j\frac{\beta_W k_W^2 kp_{01}^2 T}{2\pi\rho_W c_W{}^2}\frac{\exp[-4\alpha_W z_0-\alpha_2(z-z_0)-j2\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left(j\frac{kr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\int_0^{z_0}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\exp(2\alpha_W z')}{z'}$$
$$\exp\left[j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right]$$
$$\exp\left[-j\frac{k_WF}{4}\left(\frac{1}{z'}-\frac{k}{k_W}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\right]$$
$$J_0\left(\frac{kr\sqrt{F}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi dz'$$
$$+j\frac{\beta k^3p_{01}^2T^2}{2\pi\rho c^2}\frac{\exp[-2(\alpha_W+\alpha_1)z_0-\alpha_2 z-j2\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left(j\frac{kr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\int_{z_0}^{z}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\exp[(\alpha_2-2\alpha_1)z']}{z'-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left[j\frac{k(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{kD}\right)\right]$$
$$\exp\left[-j\frac{kF}{4}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\right]$$
$$J_0\left(\frac{kr\sqrt{F}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi dz' \tag{39}$$

$2\alpha_W z\ll 1$ で，第1項の被積分項の $\exp(2\alpha_W z')$ は $1+2\alpha_W z'$ と近似でき，さらに $(\alpha_2\text{-}2\alpha_1)z\ll 1$ で，第2項の被積分項の $\exp[(\alpha_2-2\alpha_1)z']$ は $1+(\alpha_2-2\alpha_1)z'$ と近似できる．そのとき，(39) 式は簡単化され

$$p_2=j\frac{\beta_W k_W^2 kp_{01}^2 T}{2\pi\rho_W c_W{}^2}\frac{\exp[-4\alpha_W z_0-\alpha_2(z-z_0)-j2\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left(j\frac{kr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\left[(1+j\alpha_W S)E_1\left(-j\frac{S}{2z_0}\right)\right.$$
$$\left.+2\alpha_W z_0\exp\left(j\frac{S}{2z_0}\right)\right]$$
$$\exp\left[-j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2D}\right]\exp\left(j\frac{kF}{4}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)$$
$$J_0\left(\frac{kr\sqrt{F}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi$$
$$+j\frac{\beta k^3p_{01}^2T^2}{2\pi\rho c^2}\frac{\exp[-2(\alpha_W-\alpha_1)z_0-\alpha_2 z-j2\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left(j\frac{kr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}\left\{\left[1+j\frac{S}{2}(\alpha_2-2\alpha_1)z_0(1-k/k_W)\right.\right.$$
$$\left[E_1\left(-j\frac{S}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right)-E_1\left(-j\frac{k_WS}{2kz_0}\right)\right]$$
$$-(\alpha_2-2\alpha_1)\left[\frac{kz_0}{k_W}\exp\left(j\frac{k_WS}{2kz_0}\right)-(z-z_0+kz_0/k_W)\right.$$
$$\left.\left.\left.\exp\left(j\frac{S}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right)\right]\right]\right\}\exp\left[-j\frac{k_W(x^2+y^2)}{2D}\right]$$
$$\exp\left(j\frac{kF}{4}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)J_0\left(\frac{kr\sqrt{F}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi \tag{40}$$

一方，角周波数 $n\omega$ の音波の第2高調波として発生する非線形音場 $p_{2n}(r,z)\exp[j2n(kz-\omega t)]$ の複素振幅 $p_{2n}(r,z)$ は，

$$\nabla_\perp^2 p_{2n}+j4nk\frac{\partial p_{2n}}{\partial z}+j4\alpha_{2n}kp_2=\frac{2\beta n^2k^2}{\rho c^2}p_n^2 \tag{41}$$

を (33) 式と同じ手順で解いた解

$$p_{2n}=j\frac{\beta_W n^3k_W^2 kp_{01}^2 T}{2\pi\rho_W c_W{}^2}\frac{\exp[-4n^2\alpha_W z_0-\alpha_{2n}(z-z_0)]}{z-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left(j\frac{nkr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\int_0^{z_0}\int_0^{\pi}\int_{r_3}^{r_4}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\exp(2n^2\alpha_W z')}{z'}$$
$$\exp\left[j\frac{nk_W(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right]$$
$$\exp\left[-j\frac{nk_WF}{4}\left(\frac{1}{z'}-\frac{k}{k_W}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\right]$$
$$J_0\left(\frac{nkr\sqrt{F}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi dz'$$
$$+j\frac{\beta n^3k^3p_{01}^2T^2}{2\pi\rho c^2}\frac{\exp[-2(n^2\alpha_W-\alpha_n)z_0-\alpha_{2n}z]}{z-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left(j\frac{nkr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\int_{z_0}^{z}\int_0^{\pi}\int_{r_3}^{r_4}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\exp[(\alpha_{2n}-2\alpha_n)z']}{z'-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left[j\frac{nk(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{kD}\right)\right]$$
$$\exp\left[-j\frac{nkF}{4}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\right]$$
$$J_0\left(\frac{nkr\sqrt{F}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi dz' \tag{42}$$

で表される．上式は $2n^2\alpha_W z\ll 1$ では，第1項の被積分項の $\exp(2n^2\alpha_W z')$ は $1+2n^2\alpha_W z'$ と近似でき，さらに $(\alpha_{2n}-2\alpha_n)z\ll 1$ では，第2項の被積分項の $\exp[(\alpha_{2n}-2\alpha_n)z']$ は $1+(\alpha_{2n}-2\alpha_n)z'$ と近似できるので，(42) 式は

$$p_{2n}=j\frac{\beta_W n^2k_W^2 kp_{01}^2 T}{2\pi\rho_W c_W{}^2}\frac{\exp[-4n^2\alpha_W z_0-\alpha_{2n}(z-z_0)]}{z-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left(j\frac{nkr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\int_0^{\pi}\int_{r_3}^{r_4}\int_{r_3}^{r_4}\left[(1+jn^2\alpha_W S)E_1\left(-j\frac{S}{2z_0}\right)\right.$$
$$\left.+2n^2\alpha_W z_0\exp\left(j\frac{S}{2z_0}\right)\right]\exp\left[-j\frac{nk_W(x^2+y^2)}{2D}\right]$$
$$\exp\left(j\frac{nkF}{4}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)J_0\left(\frac{nkr\sqrt{F}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi$$
$$+j\frac{\beta n^3k^3p_{01}^2T^2}{2\pi\rho c^2}\frac{\exp[-2(n^2\alpha_W-\alpha_n)z_0-\alpha_{2n}z]}{z-z_0+kz_0/k_W}$$
$$\exp\left(j\frac{nkr^2}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\int_0^{\pi}\int_{r_3}^{r_4}\int_{r_3}^{r_4}\left\{\left[1+j\frac{S}{2}(\alpha_{2n}-2\alpha_n)\right.\right.$$
$$z_0(1-k/k_W)\left[E_1\left(-j\frac{S}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right)-E_1\left(-j\frac{nk_WS}{2kz_0}\right)\right]$$
$$-(\alpha_{2n}-2\alpha_n)\left[\frac{kz_0}{k_W}\exp\left(j\frac{k_WS}{2kz_0}\right)-(z-z_0+kz_0/k_W)\right.$$
$$\left.\left.\left.\exp\left(j\frac{S}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right)\right]\right]\right\}\exp\left[-j\frac{nk_W(x^2+y^2)}{2D}\right]$$

$$\exp\left(j\frac{nkF}{4}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)J_0\left(\frac{nkr\sqrt{F}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi \tag{43}$$

と簡単化される．

4.3　角周波数 $(n-1)\omega$ の音場（差音）

角周波数 $n\omega$ の音波と角周波数 ω の音波の非線形相互作用によって発生する差周波数音場 $p_{n-1}(r,z)\exp[j(n-1)(kz-\omega t)]$ の複素振幅 $p_{n-1}(r,z)$ は，KZK 方程式を逐次近似した

$$\nabla_\perp^2 p_{n-1}+j2(n-1)k\frac{\partial p_{n-1}}{\partial z}+j2(n-1)\alpha_{n-1}kp_{n-1} = \frac{\beta(n-1)^2k^2}{\rho c^2}p_n p_1{}^* \tag{44}$$

を満たす． 4.1 節で求めた p_1, p_n を用い，4.2 節と同じ手順で上式の解を求めると，

$$\begin{aligned}p_{n-1}=&-j\frac{n(n-1)\beta_W k_W^2 k p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho_W c_W^2}\\&\frac{\exp[-(n-1)^2\alpha_W z_0-\alpha_{n-1}(z-z_0)+j\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}\\&\exp\left[j\frac{(n-1)kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_0^{z_0}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\exp(-2n\alpha_W z')}{z'}\\&\exp\left[j\frac{k_W(nx^2-y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right]\\&\exp\left[-j\frac{k_W G}{2(n-1)}\left(\frac{1}{z'}-\frac{k}{k_W}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\right]\\&J_0\left(\frac{kr\sqrt{G}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi dz'\\&-j\frac{n(n-1)\beta k^3T^2p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho c^2}\\&\frac{\exp[-(n^2+1)\alpha_W z_0+(\alpha_1+\alpha_n)z_0-\alpha_{n-1}z+j\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}\\&\exp\left[j\frac{(n-1)kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_{z_0}^{z}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\exp[-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n-1})z']}{z'-z_0+kz_0/k_W}\\&\exp\left[j\frac{k(nx^2-y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{kD}\right)\right]\\&\exp\left[-j\frac{kG}{2(n-1)}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\right]\\&J_0\left(\frac{kr\sqrt{G}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi dz'\end{aligned} \tag{45}$$

$2n\alpha_W z\ll 1$ の範囲で第 1 項の被積分項の $\exp(-2n\alpha_W z')$ は $1-2n\alpha_W z'$ と近似でき，$(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n-1})z\ll 1$ の範囲で第 2 項の被積分項の $\exp[-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n-1})z']$ は $1-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n-1})z'$ と近似できる．このとき，さらに次のように簡単化される．

$$\begin{aligned}p_{n-1}=&-j\frac{n(n-1)\beta_W k_W^2 kTp_{01}p_{0n}}{2\pi\rho_W c_W^2}\\&\frac{\exp[-(n-1)^2\alpha_W z_0-\alpha_{n-1}(z-z_0)+j\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}\\&\exp\left[j\frac{(n-1)kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\left[\left(1+j\frac{2n^2}{n-1}\alpha_W S\right)\right.\\&E_1\left(j\frac{n}{n-1}\frac{S}{z_0}\right)-2n\alpha_W z_0\exp\left(-j\frac{n}{n-1}\frac{S}{z_0}\right)\Big]\\&\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{G}{n-1}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{k}\frac{nx^2-y^2}{D}\right)\right]\\&J_0\left(\frac{k_W r\sqrt{G}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi-j\frac{n(n-1)\beta k^3T^2p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho c^2}\\&\frac{\exp[-(n^2+1)\alpha_W z_0+(\alpha_1+\alpha_n)z_0-\alpha_{n-1}z+j\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}\\&\exp\left[j\frac{(n-1)kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\left\{\left[1-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n-1})\right.\right.\\&\left.\left(z_0-\frac{kz_0}{k_W}-j\frac{nk}{n-1}\frac{S}{k_W}\right)\right]\\&\left[E_1\left(j\frac{k}{k_W}\frac{nS}{(n-1)(z-z_0+kz_0/k_W)}\right)-E_1\left(j\frac{n}{n-1}\frac{S}{z_0}\right)\right]\\&-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n-1})\Big[(z-z_0+kz_0/k_W)\\&\exp\left(-j\frac{n}{n-1}\frac{kS}{k_W}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)-\frac{kz_0}{k_W}\\&\left.\exp\left(-j\frac{n}{n-1}\frac{S}{z_0}\right)\Big]\right\}\\&\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{G}{n-1}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{k}\frac{nx^2-y^2}{D}\right)\right]\\&J_0\left(\frac{kr\sqrt{G}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi\end{aligned} \tag{46}$$

4.4　角周波数 $(n+1)\omega$ の音場（和音）

角周波数 $n\omega$ の音波と角周波数 ω の音波の非線形相互作用によって発生する和周波数音場 $p_{n+1}(r,z)\exp[j(n+1)(kz-\omega t)]$ の複素振幅 $p_{n+1}(r,z)$ は，KZK 方程式を逐次近似した

$$\nabla_\perp^2 p_{n+1}+j2(n+1)k\frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+j2(n+1)\alpha_{n+1}kp_{n+1} = \frac{\beta(n+1)^2k^2}{\rho c^2}p_1 p_n \tag{47}$$

を満たす． 4.1 節で求めた p_1, p_n を用い，4.2 節と同じ手順で上式の解を求めると，

$$\begin{aligned}p_{n+1}=&j\frac{n(n+1)\beta_W k_W^2 kp_{01}p_{0n}}{2\pi\rho_W c_W^2}\\&\frac{\exp[-(n+1)^2\alpha_W z_0-\alpha_{n+1}(z-z_0)-j\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}\\&\exp\left[j\frac{(n+1)kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_0^{z_0}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\exp(2n\alpha_W z')}{z'}\\&\exp\left[j\frac{k_W(nx^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{D}\right)\right]\\&\exp\left[-j\frac{k_W G}{2(n-1)}\left(\frac{1}{z'}-\frac{k}{k_W}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\right]\\&J_0\left(\frac{kr\sqrt{G}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi dz'\\&+j\frac{n(n+1)\beta k^3T^2p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho c^2}\\&\frac{\exp[-(n^2+1)\alpha_W z_0+(\alpha_1+\alpha_n)z_0-\alpha_{n+1}z-j\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[j\frac{(n+1)kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_{z_0}^{z}\int_{0}^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\exp[-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n+1})z']}{z'-z_0+kz_0/k_W}\\
&\exp\left[j\frac{k(nx^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{kD}\right)\right]\\
&\exp\left[-j\frac{kG}{2(n+1)}\left(\frac{1}{z'-z_0+kz_0/k_W}-\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\right]\\
&J_0\left(\frac{kr\sqrt{G}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi dz' \qquad (48)
\end{aligned}
$$

$2n\alpha_W z\ll 1$ の範囲で第 1 項の被積分項の $\exp(2n\alpha_W z')$ は $1+2n\alpha_W z'$ と近似でき，$(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n+1})z\ll 1$ の範囲で第 2 項の被積分項の $\exp[-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n+1})z']$ は $1-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n+1})z'$ と近似できる．このとき，さらに次のように簡単化される．

$$
\begin{aligned}
p_{n+1}=&j\frac{n(n+1)\beta_W k_W^2 kTp_{01}p_{0n}}{2\pi\rho_W c_W^2}\\
&\frac{\exp[-(n+1)^2\alpha_W z_0-\alpha_{n+1}(z-z_0)-j\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}\\
&\exp\left[j\frac{(n+1)kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_{0}^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\left[\left(1-j\frac{2n^2}{n+1}\alpha_W S\right)\right.\\
&\left.E_1\left(j\frac{n}{n+1}\frac{S}{z_0}\right)+j2n\alpha_W z_0\exp\left(-j\frac{n}{n+1}\frac{S}{z_0}\right)\right]\\
&\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{G}{n+1}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{k}\frac{nx^2+y^2}{D}\right)\right.\\
&J_0\left(\frac{k_W r\sqrt{G}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi\\
&+j\frac{n(n+1)\beta k^3T^2p_{01}p_{0n}}{2\pi\rho c^2}\\
&\frac{\exp[-(n^2+1)\alpha_W z_0+(\alpha_1+\alpha_n)z_0-\alpha_{n+1}z-j\varphi]}{z-z_0+kz_0/k_W}\\
&\exp\left[j\frac{(n+1)kr^2}{2(z-z_0+kz_0/k_W)}\right]\int_{0}^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_3}^{r_4}\left\{\left[1-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n+1})\right.\right.\\
&\left.\left(z_0-\frac{k}{k_W}z_0-j\frac{k}{k_W}\frac{nS}{n+1}\right)\right]\\
&\left[E_1\left(j\frac{nk}{(n+1)k_W}\frac{S}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)-E_1\left(j\frac{nS}{(n+1)z_0}\right)\right]\\
&-(\alpha_1+\alpha_n-\alpha_{n+1})\left[(z-z_0+kz_0/k_W)\right.\\
&\exp\left(-j\frac{nk}{(n+1)k_W}\frac{S}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)\\
&\left.\left.-\frac{kz_0}{k_W}\exp\left(-j\frac{nS}{(n+1)z_0}\right)\right]\right\}\\
&\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{G}{n+1}\frac{1}{z-z_0+kz_0/k_W}-\frac{k_W}{k}\frac{nx^2+y^2}{D}\right)\right]\\
&J_0\left(\frac{kr\sqrt{G}}{z-z_0+kz_0/k_W}\right)xydxdyd\phi \qquad (49)
\end{aligned}
$$

5．計算と実験の比較

$r_1=4.5$mm，$r_2=8.5$mm，$r_3=0$mm，$r_4=3.5$mm で，$\omega/2\pi=2$MHz，$n=4$，$D=45$mm の同軸複合音源の場合に水中に生成される 2MHz 線形音場，4MHz 高調波音場，6MHz 差音音場，8MHz 線形音場，10MHz 和音音場を 3 節の結果を用いて計算した．また一方，曲率半径が共に 45mm である内径 5 mm，外径 7 mm の 2MHz 円環状凹面圧電振動子と半径 4 mm の 8MHz 円形凹面圧電振動子が電気的に並列に接続された状態で，これらを水中に同軸に配置した．2MHz，8MHz 成分の音源音圧 p_{01}，p_{04} が，焦点の音圧から逆算して，それぞれ 220dB *re* 1μPa となるように，2MHz および 8MHz を合成したバースト電圧で駆動し，そのときの音場を観測した．音源からの軸方向距離 10〜60mm，軸からの径方向距離 0〜10mm で，直径 1 mm のニードル型 PVDF ハイドロホンにより音圧波形を観測し，その FFT 処理により 2MHz，4MHz，6MHz，8MHz，10MHz成分を検出した．$2n\omega$ の 16MHz 成分は，医用診断には高減衰として除外した．計算結果を Fig. 2 に，実験結果を Fig. 3 に示す．横軸が音源からの距離，縦軸が音軸からの距離であり，音軸を含む音源に垂直な面での音圧振幅分布を色諧調で示している．色諧調に対応する音圧レベルを各図の右側に示してある．音圧レベルは，計算でも音源音圧 p_{01} および p_{02} を共に 220dB *re* 1μPa としており，Fig. 2，3 の数値はそのときの音圧を dB *re* 1μPa 単位で示したものである．両者の音圧分布パターンやレベルがほぼ一致していることがわかる．また，これらのすべてがビーム内で検出の容易なレベルにあることがわかる．なお，実測の 8MHz 1 次波音場は，計算に較べ，音源近傍でややビームに拡がりが見られるが，これは 2 MHz 実験振動子の若干の非対称性により，4 倍周波数ながら若干の音波放射があるためである．生体組織内に音場が作られる場合には，ここでの実験のようにハイドロホンを置いて音圧分布を計測することは不可能であるが，本計算法を用いれば音圧分布を先験的に予測できる．

6．あとがき

超音波映像におけるスペックルノイズ除去の研究過程で行われた非線形音場の解析をまとめて示した．すなわち，水中および水を介して生体中に同軸で 2 周波の集束超音波を放射したときに形成される非線形伝搬音場について，KZK 方程式の逐次近似解析により，1 次波と 2 次波音波の計算方法を示した．原音波の 1 次波と 2 次波である第 2 高調波，差音，和音はそれぞれ別の解となるので，それらを各々示した．2MHz と 8MHz を同軸の集束音源から放射したときの計算結果と実験結果を比較し，ここで求めた解の妥当性を示した．

文　献

Akiyama, I., A. Ohya and S. Saito (2005): Speckle noise reduction by superposing many higher harmonic images. Jpn. J. Appl. Phys., **44**, 4631-4636.

Akiyama, I., S. Saito and A. Ohya (2006): Development of an ultra-broadband ultrasonic imaging system: Proto-

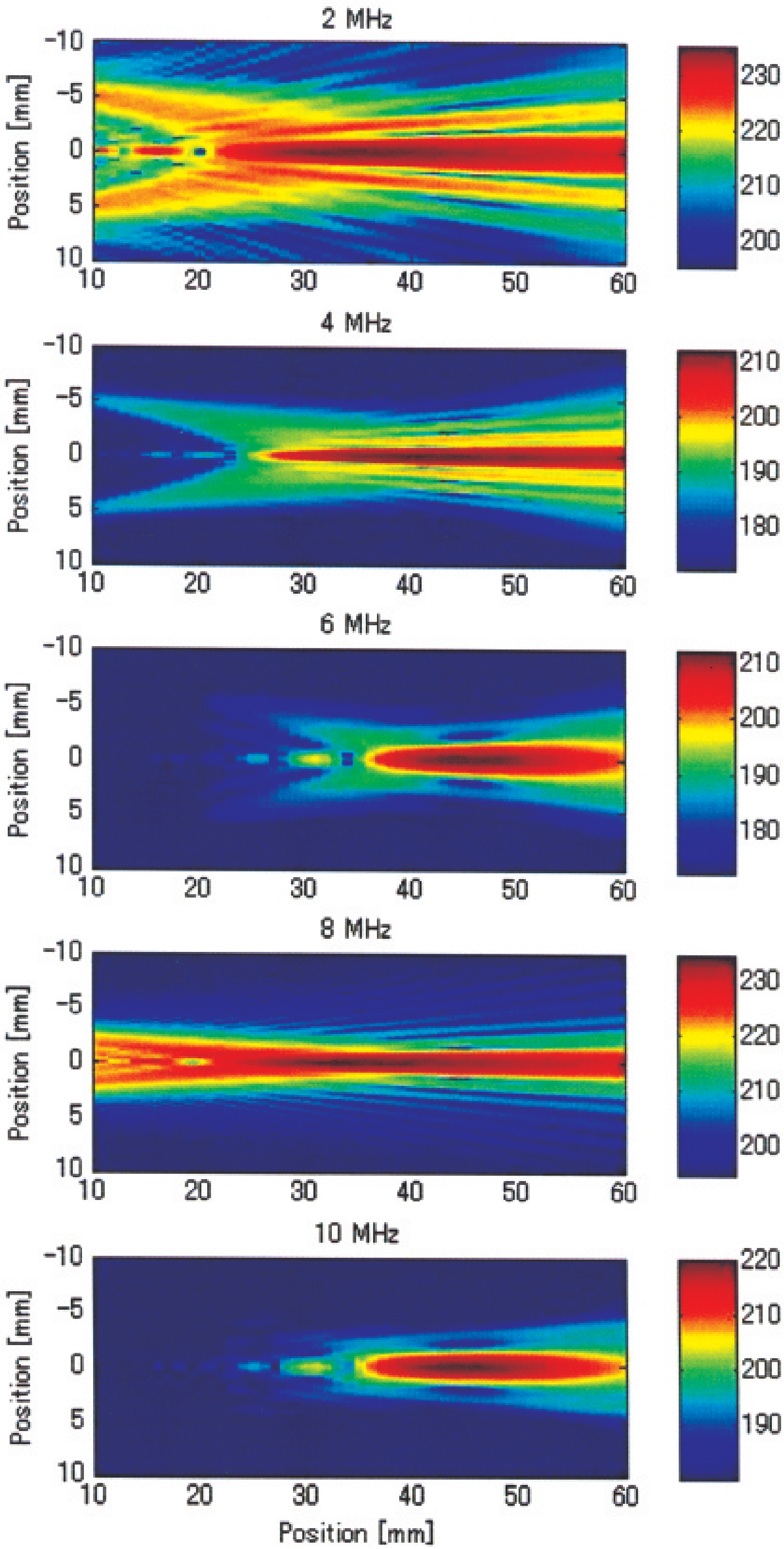

Fig. 2　Analytical result for the acoustic field of 2 and 8 MHz sources.

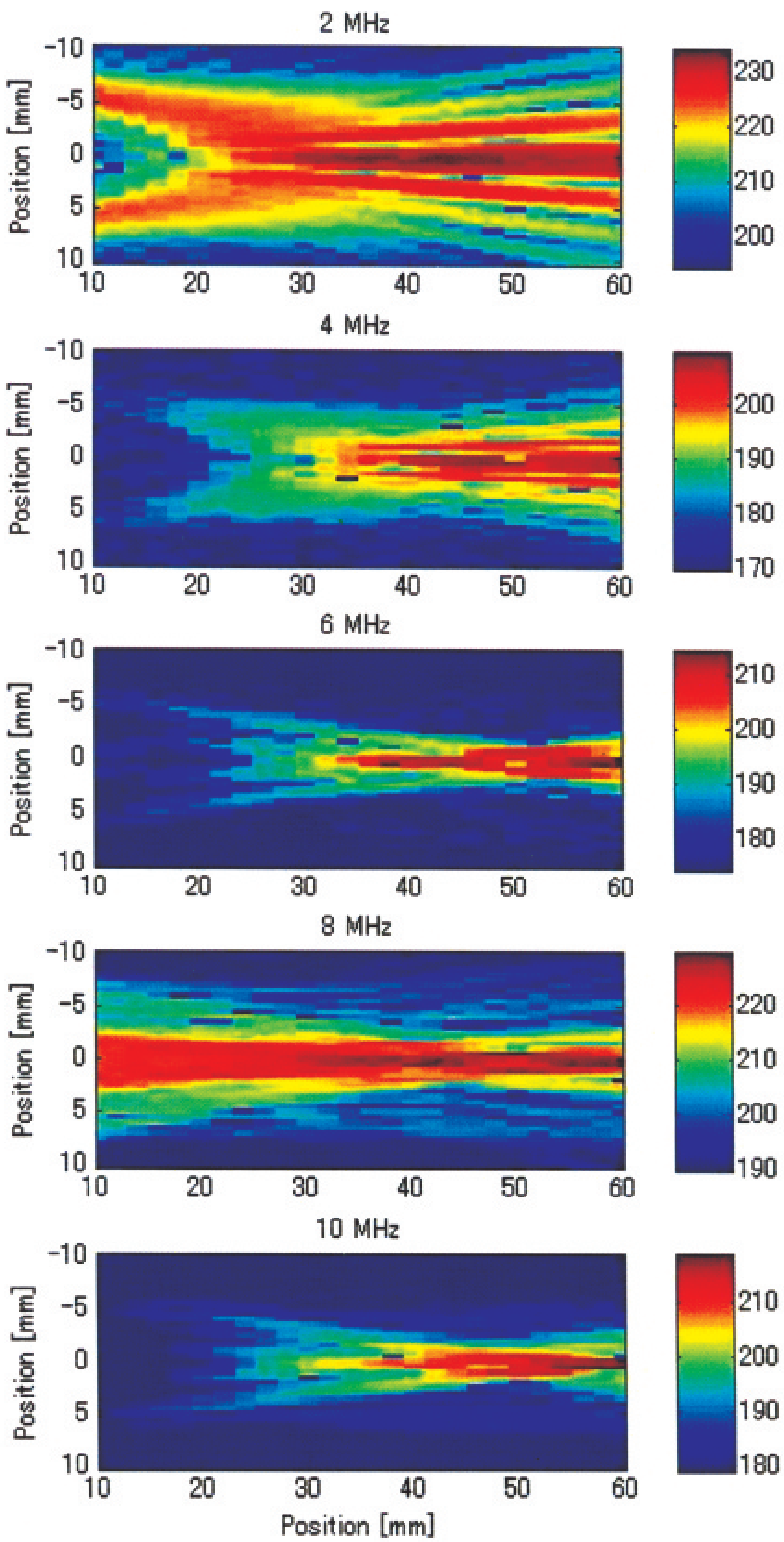

Fig. 3 Experimentally observed acoustic field of 2 and 8 MHz sources.

type mechanical sector device. J. Med. Ultrasonics, **33**, 71–76.

Akiyama, I., N. Yoshizumi, S. Saito and A. Ohya (2008): Nonlinear multibeam ultrasonic imaging: Simultaneous transmission of ultrasonic waves of two frequencies. Acoustical Imaging (to be published).

Averkiou, M. A., D. N. Roundhill and J. E. Powers (1997): A new imaging technique based on the nonlinear properties of tissues. Proc. IEEE Utrasonic Symp. Toronto, 1561–1566.

Bouakaz, A. and N. de Jong (2003): Native tissue imaging at superharmonic frequencies. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, **50**, 496–506.

Garrett, G. S., J. N. Tjotta and S. Tjotta (1983): Nearfield of a large acoustic transducer, Part II: Parametric radiation. J. Acoust. Soc. Am., **74**, 1013–1029.

Tjotta, J. N. and S. Tjotta (1980): An analytical model for the nearfield of a baffled piston transducer. J. Acoust. Soc. Am., **68**, 334–339.

Ward, B., A. C. Baker and V. F. Humphrey (1997): Nonlinear propagation applied to the improvement of resolution in diagnostic medical ultrasound. J. Acoust. Soc. Am., **101**, 143–154.

Westervelt, P. J. (1963): Parametric acoustic array. J. Acoust. Soc. Am., **35**, 535–537.

付　録

純虚数 jx を引数とする積分指数関数 $E_1(jx)=-\mathrm{Ci}(x)+j\mathrm{si}(x)$ は，次のように数値的に与えられる．

$$\begin{aligned}\mathrm{si}(x)&=-\frac{\pi}{2}+x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{600}-\frac{x^7}{35280} &&;0\leq x\leq 1\\ &=-A\sin x-B\cos x &&;1\leq x\end{aligned}\tag{A1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ci}(x)&=0.57721567+\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{96}-\frac{x^6}{4320}+\frac{x^8}{322560} &&;0\leq x\leq 1\\ &=B\sin x-A\cos x &&;1\leq x\end{aligned}\tag{A2}$$

ただし

$$A=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4+7.547478x^2+1.564072}{x^4+12.723684x^2+15.723606}\right)\tag{A3}$$

$$B=\frac{1}{x}\left(\frac{x^4+7.241163x^2+2.463936}{x^4+9.06858x^2+7.157433}\right)\tag{A4}$$

要　旨

超音波画像におけるスペックルノイズを効率的に除去するために，著者らは異なる周波数で得られた多数の画像を重畳する方法を研究している．このような条件を簡便に成立させるため，もとの２つの線形音波，各ビームの非線形伝搬によって生成される２つの第2高調波，２つの１次波ビームの非線形相互作用によって生成される差および和の周波数の音波という異なる周波数の６つの音響ビームが強く励振される，二周波同軸集束音源を使うことを提案している．本論文では，それら６種類の音場に対する線形もしくは準線形の解を，Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程式の逐次近似解で求めている．解析は，水カップラの層と生体媒質をモデルとする他の減衰の大きい層という２つの領域で行われている．線形成分の解は単積分で表されるが，非線形成分の解は４重積分を含む複雑なものである．数値計算を簡単化するため，後者の解は積分指数関数を用いた３重積分に近似している．本解析の妥当性は，2MHz と 8MHz の同軸集束音源が水中に形成した音場について，計算と実験を比較することにより確かめられている．2MHz，4MHz，6MHz，8MHz，10MHz の音場の解析結果は実験で観測される音場とよく一致している．